compÁs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

UNIVERSIDAD TÉCNICA ESTATAL DE QUEVEDO
1984
ECUADOR

Principios de Álgebra Lineal

Angel Torres Quijije
Leonardo Vinces Llaguno
Jimmy Cedeño Barzola

Principios de Álgebra Lineal

Leonardo Vinces Llaguno
Jimmy Cedeño Barzola

Universidad Técnica Estatal de Quevedo

Título del libro
Principios de Álgebra Lineal

ISBN: 978-9942-33-546-3

Publicado 2022 por acuerdo con los autores.

Guayaquil-Ecuador

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com

compás
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

INTRODUCCIÓN

El libro "Principios de Álgebra Lineal", es una recopilación de las nociones básicas basadas en definiciones, teoremas y postulados, plasmados en una variedad de ejercicios resueltos y propuestos para fomentar el aprendizaje de los estudiantes de tercer nivel en el área de las ingenierías y profesiones afines que requieran de la formación matemática, como pilar fundamental en su formación profesional. El objetivo de este texto es conseguir que el alumno/a domine las herramientas que proporcionan las matemáticas, que es requisito en cada una de las carreras de formación profesional con mayor énfasis en las ingenierías como son: eléctrica, mecánica, telemática, industrial, agroindustrias, entre otras que ofertan las instituciones de educación superior del país como la Universidad Técnica Estatal de Quevedo a través de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería.

En el campo de la ingeniería aplicada se puede encontrar una gama de problemas y aplicaciones ingenieriles que pueden ser abordados desde los ejes temáticos de vectores, matrices y sistemas lineales de ecuaciones, espacios vectoriales, e inclusive transformaciones lineales, los cuales son materia de estudio sin abandonar el rigor formal en la exposición, se ha procurado hacer asequible cada tema mediante ejemplos prácticos empleado ejercicios resueltos y dejando otros propuestos para cumplir con el proceso de aprendizaje en un intento de que los estudiantes rompan con su rol habitual de espectadores-

oyentes, cumplidores de actividades mecanicistas, y consigan una dinámica nueva de trabajo.

Además, se incluyen demostraciones básicas de teoremas que se pueden considerar formativos y que desarrollan la capacidad de razonamiento lógico y de análisis crítico y que la asignatura de algebra lineal se convierta en una herramienta útil en la praxis ingenieril como el empleo de matrices en el modelado de problemas, motivo por el cual cada sección finaliza con ejercicios propuestos que ayudarán a cimentar los conocimientos adquiridos, además servirá como instrumento de evaluación del proceso de aprendizaje de cada capítulo.

MATRICES

Las matrices constituyen el elemento esencial del Álgebra Lineal. En este libro se la utilizará para resolución de sistemas de ecuaciones en donde se requerirá solamente los coeficientes, ya que la matriz permite organizar esos datos por ecuaciones y por incógnitas en su estructura de filas y columnas.

En los capítulos siguientes se introducirá conceptos más abstractos como el de “operador lineal” que se puede representar por medio de una matriz.

El estudio de las matrices reviste gran importancia por su variada aplicación en ingeniería y análisis de gran cantidad de datos.

El capítulo inicia con: Una definición de matriz; luego se estudian las operaciones elementales entre filas (columnas), tema que es muy utilizado durante todo el texto para diferentes procesos; Las operaciones entre matrices; Clasificación de matrices; El estudio de un tipo de matriz muy importante, Matriz Inversa y los procesos para encontrarla; concluye el capítulo con el estudio de la Determinante de una matriz y los métodos para calcular su valor.

Definición de matrices

Una matriz es un arreglo bidimensional de números consistente en cantidades abstractas que pueden sumarse y multiplicarse entre sí, también, se podría decir que es una disposición de valores numéricos y/o variables (representadas por letras), en columnas y filas, de forma rectangular.

Es decir, una matriz de dimensión $m\,x\,n$ es una disposición rectangular en m filas y n columnas de números, reales o complejos, denominados elementos o entradas. Las matrices se suelen indicar con letras mayúsculas, mientras que los elementos de las mismas se denotan con letras minúsculas.

Definición: Una matriz sobre un campo k, es una función A de la forma:

$$A: [(i,j)/\ i = 1,2,3, \dots mj = 1,2,3, \dots n \rightarrow k]$$

$$A(i,j) = a_{i,j} \in k$$

Donde, $a_{i,j}$son los elementos de la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$,

Así, el elemento (i,j) de la matriz, es decir, el que ocupa la posición dada por la i-ésima fila y la j-ésima columna, se representa mediante $a_{i,j}$.

El conjunto de todas las matrices $m\ x\ n$ con elementos reales se denota por $\mathbb{R}^{(n\times n)}$; el conjunto de todas las matrices $m\ x\ n$ con elementos complejos se denota por $\mathbb{C}^{(n\times n)}$. Para referirnos en general a cualquiera de estos conjuntos escribiremos $k^{(n\times n)}$

También usaremos el término escalar para referirnos a un elemento del conjunto K, ya sea éste $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. El símbolo K representa en general un conjunto con la estructura algebraica de cuerpo.

Para que dos matrices se consideren iguales deben tener el mismo número de elementos y, además, los elementos deben ocupar la misma posición en ambas matrices. Lo anterior implica que la matriz A es igual a la matriz B cuando A y B tienen el mismo orden mxn y, además, se cumple que: $a_{i,j} = b_{i,j}$

Clasificación de matrices

De conformidad a los elementos que integran la matriz, se las puede clasificar con las siguientes definiciones:

i. Dos matrices $A = (a_{i,j})_{mxn}$ y $B = (b_{i,j})_{pxq}$, son **matrices iguales** si y solo si $\begin{cases} m = p, \ \ n = q \\ a_{i,j} = b_{i,j} \ \ \forall i, j \end{cases}$

ii. Sea la matriz $A = (a_{i,j})_{mxn}$, se llama **matriz transpuesta** de A, a la matriz $B = (a_{p,q})_{nxm}$, donde: $a_{p,q} = b_{q,p}$ $\forall p, q$ y se la nota $B = A^T$

Ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

iii. Sea la matriz $A = (a_{i,j})_{mxn}$, se llama **matriz cuadrada**, a la matriz donde $n = m$, y se denota $A_n = A_{nxn}$

Ejemplo: $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

iv. Si la matriz cuadrada $A = (a_{i,j})_{nxn}$, se dice que la **matriz es simétrica**, ósea si es igual a su transpuesta, se dice: $A^T = A$

Ejemplo: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

v. Si la matriz cuadrada $A = \left(a_{i,j}\right)_{nxn}$, se dice que la **matriz es anti simétrica**, ósea, es igual a su negativa, se dice: $A^T = -A$.

Ejemplo: $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -A}$

Los elementos de la diagonal de la matriz A, deben ser nulos para que sea una matriz anti simétrica.

vi. Sea la matriz $A = \left(a_{i,j}\right)_{mxn}$, se llama **matriz nula**, si y solo si $a_{i,j} = 0, \forall i, j$.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, todos los elementos de la matriz son nulos

vii. Sea la matriz cuadrada $A = \left(a_{i,j}\right)_{nxn}$, se dice que es la **matriz identidad** si y solo si $\begin{cases} a_{i,j} = 0, \forall i, j / i \neq j \\ a_{i,j} = 1, \forall i, j / i = j \end{cases}$, y se la representa por el símbolo $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$, es decir todos los elementos de la diagonal son uno y los demás son nulos.

Ejemplo: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

viii. Sea la matriz cuadrada $A = \left(a_{i,j}\right)_{nxn}$, se dice que es una **matriz diagonal** si y solo si $a_{i,j} = 0, \forall i, j / i \neq j$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ix. Sea la matriz cuadrada $A = \left(a_{i,j}\right)_{nxn}$, se dice que es una **matriz escalar** si y solo si $\begin{cases} a_{i,j} = 0, \forall i, j \underset{i}{-} \neq j \\ a_{i,j} = k, \forall i, j - i = j \end{cases}$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

x. Sea la matriz cuadrada $A = \left(a_{i,j}\right)_{nxn}$, se dice que es una **matriz triangular superior** si y solo si $a_{i,j} = 0, \forall i, j \ / i > j$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

xi. Sea la matriz cuadrada $A = \left(a_{i,j}\right)_{nxn}$, se dice que es una **matriz triangular inferior** si y solo si $a_{i,j} = 0, \forall i, j \ / \ i < j$.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

1.1. Operaciones elementales de fila

En una matriz $A = (a_{i,j})_{mxn}$, se pueden realizar operaciones elementales entre filas sobre un campo k, y estas pueden ser de tres tipos:

i. Producto de una fila de la matriz A, por un escalar no nulo, expresado como $A_p = c * A_p$, siendo $c \neq 0$, o también se lo puede expresar como $c * A_p = c * (a_{p,1}, a_{p,1}, \dots . a_{p,1n}) = (c * a_{p,1}, c * a_{p,1}, \dots . c * a_{p,1n})$

   Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}_{F_2=-2*F_2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -12 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

ii. Reemplazo de la p-ésima fila de una matriz A más c veces una fila q, considerando que $p \neq q$, esto se puede expresar como $A_p = A_p + c * A_q$

   Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}_{F_2=-F_2+3*F_1} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 10 & -6 & 18 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

iii. Intercambio de filas de una matriz A, y se lo puede expresar como $A_p \leftrightarrow A_q$, considerando $p \neq q$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}_{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 4 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Definición: Sean las matrices $A, B \in M_{mxn}$,se dice que la matriz B en equivalentes por filas a la matriz A, si a la matriz B, se la obtiene mediant1e un número finito de operaciones elementales de fila de la matriz A, es decir: $A \simeq B$, si y solo si $e_p\left(e_{p-1}\left(\ldots\ldots e_2\left(e_1(A)\right)\right)\right) \simeq B$. Además, se pueden realizar operaciones elementales inversas de filas y de esta forma se puede partir de la matriz B y llegar a la matriz A, por lo que podemos indicar: $B \simeq A \Rightarrow A \simeq B$.

Ejemplo: Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$y $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 5 & 8 & -14 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, demostrar que A es una matriz equivalente de B $(A \simeq B)$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}_{F_2 = -1 * F_2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & -6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}_{F_3 = F_3 + 2 * F_2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & -6 \\ 5 & 8 & -14 \end{pmatrix}_{F_1 = F_1 + F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -6 \\ 5 & 8 & -14 \end{pmatrix}_{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 5 & 8 & -14 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix} = B$$

Definición: Sea la matriz $A \in M_{mxn}$, se dice que la matriz A es una **matriz reducida por filas**, si cumple las siguientes condiciones:

i. El primer elemento de una fila no nulas es un elemento no nulo.
ii. Cada columna de la matriz A que tiene el primer elemento no nulo de alguna fila y sus otros elemento de la fila son nulos.

Ejemplo: las siguientes matrices son reducidas por filas

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema: Toda matriz $A \in M_{mxn}$, es una **matriz equivalente** a una matriz reducida por filas.

Definición: El número de filas no nulas de una matriz reducida por filas de una matriz equivalente de la matriz A, es conocida como el rango de una matriz y se notara como: $rg(A)$.

Ejemplo: Determinar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 7 & -8 \\ -4 & -16 & 12 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 7 & -8 \\ -4 & -16 & 12 \end{pmatrix}_{F_3=F_3+4*F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{F_2=F_2-3*F_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ o & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= B \Rightarrow rg(A) = 2$$

Definición: Sea la matriz $A \in M_{mxn}$, se dice que la matriz A es una matriz escalonada reducida por filas, si cumple las siguientes condiciones:

i. A es una matriz reducida por filas.
ii. Toda fila nula está bajo las filas no nulas de la matriz A.
iii. Si las filas $(1,2,3, \dots p)$ y $p < m$, son las filas no nulas de la matriz A y si el primer elemento no nulo de la fila i está en la columna q.

Ejemplo: La siguiente la matriz A, es una matriz escalonada reducida por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones entre matrices

Con las matrices también se pueden realizar ciertas operaciones básicas como y suma y multiplicación de matrices bajo ciertas consideraciones como se indican a continuación

Suma de matrices

Sean las matrices $A, B \in M_{mxn}$, se llaman suma de matrices de $A = \left(a_{i,j}\right)_{mxn}$ y $B = \left(b_{i,j}\right)_{mxn}$, a la matriz $C = \left(c_{i,j}\right)_{mxn}$, tal que $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$, $\forall i, j$, representada por $C = A + B$

Ejemplo: Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, encontrar $= A + B$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3 & -2+4 & 4+1 \\ 1+(-3) & 0+2 & 6+0 \\ 7+5 & 8+1 & -2+3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 6 \\ 12 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Resta de matrices

Sean las matrices $A, B \in M_{mxn}$, se llaman resta o diferencia de matrices de $A = \left(a_{i,j}\right)_{mxn}$ y $B = \left(b_{i,j}\right)_{mxn}$, a la matriz $C = \left(c_{i,j}\right)_{mxn}$, tal que $c_{i,j} = a_{i,j} + \left(-b_{i,j}\right)$, $\forall i, j$, representada por $C = A + (-B) = A - B$.

Ejemplo: Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, encontrar $= A - B$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3 & -2-4 & 4-1 \\ 1-(-3) & 0-2 & 6-0 \\ 7-5 & 8-1 & -2-3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 2 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Para realizar la suma o diferencia de matrices, estas deben ser del mismo orden y se tienen las siguientes propiedades para la suma de matrices:

i. $(\forall A \in M_{mxn}) / -(-A) = A$

ii. $(\forall A, B \in M_{mxn}) / -(A + B) = (-A) + (-B)$

iii. $(\forall A, B \in M_{mxn})(\exists!\, C \in M_{mxn}) / A + C = B$

iv. $(\forall A, B, C \in M_{mxn}), sí\ A + B = B + C \Rightarrow A = C$

Ejercicios Resueltos de suma de matrices:

Considere las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 \\ -8 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ D = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, realizar las siguientes operaciones:

i) $C - D - B$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 \\ -8 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad -D \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -1 & -7 & -3 \\ -5 & -4 & -8 \end{pmatrix}; \; -B = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C - D - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 12 \\ -6 & -8 & 3 \\ -6 & -3 & -16 \end{pmatrix}$$

ii) $CT - DT - BT$

$$C^T = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix} \quad D^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & 7 & 4 \\ -4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix} \; -D^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -3 & -7 & -4 \\ 4 & -3 & -8 \end{pmatrix} \; -B^T = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C^T - D^T - B^T = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -2 & -8 & -3 \\ 12 & 3 & -16 \end{pmatrix}$$

iii) $A + C - D$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 \\ -8 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad -D = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -1 & -7 & -3 \\ -5 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A + C - D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 17 \\ -8 & -6 & 9 \\ 6 & 6 & -15 \end{pmatrix}$$

iv) $AT + CT - DT$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & 8 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad C^T = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix} \quad D^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ -4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & 8 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad C^T = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix} \quad -D^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ -3 & -7 & -4 \\ 4 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^T + C^T - D^T = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 6 \\ 0 & -6 & 6 \\ 17 & 9 & -15 \end{pmatrix}$$

v) $B + A - C$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix} \quad -C = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -9 \\ 8 & -1 & -6 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B + A - C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Producto entre un escalar y una matriz

Sea $A = (a_{i,j})_{mxn}$ sobre un campo k y $\alpha \in k$, el producto entre el escalar α y la matriz A está definido por: $\alpha A = \alpha(a_{i,j})_{mxn} = (\alpha a_{i,j})_{mxn}$, $\forall i, j$

Ejemplo: sea: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, encontrar $(-7) * A$

$$(-7) * A = (-7) * \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-7) * (-3) & (-7) * 1 \\ (-7) * 0 & (-7) * 2 \\ (-7) * 1 & (-7) * (-4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & -7 \\ 0 & -14 \\ -7 & 28 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de un escalar por una matriz

i. $1 * A = A$ (Existencia de un neutro multiplicativo).

ii. $(\alpha * \beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$, donde α y β son escalares (Propiedad asociativa de la multiplicación).

iii. $(\alpha \pm \beta)A = \alpha A \pm \beta A$, donde α y β son escalares (Propiedad distributiva).

iv. $\alpha O_{mxn} = O_{mxn}$, donde O_{mxn} es una matriz nula (Propiedad multiplicativa de una matriz nula).

v. $0 * O_{mxn} = O_{mxn}$, donde O_{mxn} es una matriz nula (Propiedad multiplicativa de una matriz nula).

vi. Sí $\alpha A_{mxn} = O_{mxn} \Rightarrow \alpha = 0 \quad \vee \quad A_{mxn} = O_{mxn}$ (Propiedad multiplicativa de una matriz nula).

vii. $(-1) * A = -A$

viii. $(-\alpha)A = (\alpha)(-A) = -(\alpha)A$

ix. $\alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$ (Propiedad distributiva).

Ejercicios resueltos del producto entre una matriz y un escalar

Considere las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 \\ -8 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ D = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, realizar las siguientes operaciones:

a) Si $\beta = \frac{\sqrt{7}}{6}$, calcular βA

A= $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ βA= $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ βA= $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} & -\frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{2\sqrt{7}}{3} \\ \frac{\sqrt{7}}{6} & 0 & \sqrt{7} \\ \frac{7\sqrt{7}}{6} & \frac{4\sqrt{7}}{3} & -\frac{\sqrt{7}}{3} \end{pmatrix}$

b) Calcular βC

C = $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 \\ -8 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ βC= $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 \\ -8 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ βC= $\begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{7}}{6} & \frac{5\sqrt{7}}{6} & \frac{3\sqrt{7}}{2} \\ -\frac{4\sqrt{7}}{3} & \frac{\sqrt{7}}{6} & \sqrt{7} \\ \frac{2\sqrt{7}}{3} & \frac{\sqrt{7}}{3} & -\frac{5\sqrt{7}}{6} \end{pmatrix}$

c) Calcular βB

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \beta B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \beta B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{2} & \frac{2\sqrt{7}}{3} & \frac{\sqrt{7}}{6} \\ -\frac{\sqrt{7}}{2} & \frac{\sqrt{7}}{3} & 0 \\ \frac{5\sqrt{7}}{6} & \frac{\sqrt{7}}{6} & \frac{\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}$$

d) Calcular βD

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \beta D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \beta D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{\sqrt{7}}{2} & -\frac{2\sqrt{7}}{3} \\ \frac{\sqrt{7}}{6} & \frac{7\sqrt{7}}{6} & \frac{\sqrt{7}}{2} \\ \frac{5\sqrt{7}}{6} & \frac{2\sqrt{7}}{3} & \frac{4\sqrt{7}}{6} \end{pmatrix}$$

Multiplicación entre matrices

Sean las matrices $A = (a_{i,j})_{mxn} \in M_{mxn}$ y $B = (b_{i,j})_{mxn} \in M_{mxp}$, el producto de la matriz A por la matriz B, es la matriz $C = (c_{i,j})_{mxp} \in M_{mxp}$, representado por $C = A.B$ y cada elemento $c_{i,j}$ está definido por:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} * b_{k,j}\,, \qquad \begin{cases} \forall i = 1,2,3 \ldots\ldots, m \\ \forall j = 1,2,3 \ldots\ldots, p \end{cases}$$

Es decir que para poder multiplicar matrices es necesario que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de filas de la matriz B, por cuanto el elemento de la fila i y la columna j del producto de la matriz A por la matriz B, es el producto escalar del vector de la i-ésima fila de A por el vector columna j-ésimo de B, es decir:

$$c_i = (a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \cdots \quad a_{i,n}) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$$

$$= (a_{i,1} \quad a_{i,2} \quad \cdots \quad a_{i,n})\begin{pmatrix} b_{1,j} & b_{2,j} & \cdots & b_{n,j} \end{pmatrix} = A_i . B^j$$

$$= a_{i,1} * b_{1,j} + a_{i,2} * b_{2,j} + \cdots + a_{i,n} * b_{n,j}$$

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 9 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & -8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 \\ -9 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $A.B$

$$AxB = \begin{pmatrix} (5*4)+(-2*-9)+(3*5) & (5*9)+(-2*2)+(3*8) & (5*1)+(-2*2)+(3*1) \\ (9*4)+(2*-9)+(1*5) & (9*9)+(2*2)+(1*8) & (9*1)+(2*2)+(1*1) \\ (7*4)+(7*-9)+(-8*5) & (7*9)+(7*2)+(-8*8) & (7*1)+(7*2)+(-8*1) \end{pmatrix}$$

$$AxB = \begin{pmatrix} 20+18+15 & 45-4+24 & 5-4+3 \\ 36-18+5 & 81+4+8 & 9+4+1 \\ 28-63-40 & 63+14-64 & 7+14-8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 53 & 65 & 4 \\ 23 & 93 & 14 \\ -75 & 13 & 13 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, encontrar

$A.B$

$$\begin{pmatrix} 2*-1+1*-1+0*3 & 2(0)+(1*1)+0*0 & 2(2)+(1*2)+0*(-2) & 2(-2)+(1*0)+0*3 \\ -3*-1+0*-1+4*3 & -3(0)+(0*1)+4*0 & -3(2)+(0*2)+4*(-2) & -3(-2)+(0*0)+4*3 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 & -4 \\ 15 & 0 & -14 & 18 \end{pmatrix}$$

Observar que el producto de una matriz A_{2x3} y la matriz B_{3x4}, dio como resultado una matriz $A.B_{2x4}$, por lo tano $A.B \neq B.A$ por ser de ordenes diferentes no se podría realizar B.A.

Propiedades del producto entre matrices:

i. $(\forall A \in M_{mxn})$, $(\forall B \in M_{nxp})$, $(\forall C \in M_{pxq}) \Rightarrow (A.B).C = A.(B.C)$, es decir el producto es asociativo siempre y cuando exista el producto

ii. Sea $A = (a_{i,j}) \in M_n$ e $I = (\delta_{i,j}) \in M_n$, donde $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, si\ i = j \\ 0, si\ i \neq j \end{cases} \Rightarrow A.I = I.A = A$, es decir que la matriz identidad es el neutro multiplicativo en matrices cuadradas, se puede tener el neutro multiplicativo por la izquierda $(I.A = A)$ y el neutro multiplicativo por la derecha $(A{:}I = A)$

iii. $(\forall A \in M_{mxn})$, $(\forall B, C \in M_{nxp}) \Rightarrow A.(B + C) = A.B + A.C$, es decir que se cumple la propiedad distributiva del producto sobre la suma, siempre que se cumpla con las condiciones para la suma y el producto, y se puede tener la propiedad distributiva por la izquierda $(A.(B + C) = A.B + A.C)$ y la

propiedad distributiva por la derecha $((A+B).C = A.C + B.C)\}$

Ejercicios resueltos de multiplicación entre matrices:

Considere las matrices: $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 9 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & -8 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 \\ -9 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ -3 & 8 & 6 \\ 4 & 9 & -3 \end{pmatrix}$ y D = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 6 & 7 & 5 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, resolver los siguientes productos de matrices:

1) $A\ x\ B$

$$AxB = \begin{pmatrix} (5*4)+(-2*-9)+(3*5) & (5*9)+(-2*2)+(3*8) & (5*1)+(-2*2)+(3*1) \\ (9*4)+(2*-9)+(1*5) & (9*9)+(2*2)+(1*8) & (9*1)+(2*2)+(1*1) \\ (7*4)+(7*-9)+(-8*5) & (7*9)+(7*2)+(-8*8) & (7*1)+(7*2)+(-8*1) \end{pmatrix}$$

$$AxB = \begin{pmatrix} 20+18+15 & 45-4+24 & 5-4+3 \\ 36-18+5 & 81+4+8 & 9+4+1 \\ 28-63-40 & 63+14-64 & 7+14-8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 53 & 65 & 4 \\ 23 & 93 & 14 \\ -75 & 13 & 13 \end{pmatrix}$$

2) $BT\ x\ D$

$B^T x D$

$$= \begin{pmatrix} (4*1)+(-9*6)+(5*1) & (4*3)+(-9*7)+(5*5) & (4*-4)+(-9*5)+(5*8) \\ (9*1)+(2*6)+(8*1) & (9*3)+(2*7)+(8*5) & (9*-4)+(2*5)+(8*8) \\ (1*1)+(2*6)+(1*1) & (1*3)+(2*7)+(1*5) & (1*-4)+(2*5)+(1*8) \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 \\ 9 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 6 & 7 & 5 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B^T x D = \begin{pmatrix} 4-54+5 & 12-63+25 & -16-45+40 \\ 9+12+8 & 21+14+40 & -36+10+64 \\ 1+12+1 & 3+14+5 & -4+10+8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -45 & -26 & -21 \\ 29 & 75 & 38 \\ 14 & 22 & 14 \end{pmatrix}$$

3) B x DT

$B x D^T =$

$$\begin{pmatrix} (4*1)+(9*3)+(1*-4) & (4*6)+(9*7)+(1*5) & (4*1)+(9*5)+(1*8) \\ (-9*1)+(2*3)+(2*-4) & (-9*6)+(2*7)+(2*5) & (-9*1)+(2*5)+(2*8) \\ (5*1)+(8*3)+(1*-4) & (5*6)+(8*7)+(1*5) & (5*1)+(8*5)+(1*8) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 \\ -9 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad D^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ -4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B x D^T = \begin{pmatrix} 4+27-4 & 24+63+5 & 4+45+8 \\ -9+6-8 & -54+14+10 & -9+10+16 \\ 5+24-4 & 30+56+5 & 5+40+8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 27 & 92 & 57 \\ -11 & -30 & 17 \\ 25 & 91 & 53 \end{pmatrix}$$

$$CxD = \begin{pmatrix} (4*1)+(5*6)+(9*1) & (4*3)+(5*7)+(9*5) & (4*-4)+(5*5)+(9*8) \\ (-3*1)+(8*6)+(6*1) & (-3+3)+(8*7)+(6*5) & (-3*-4)+(8*5)+(6*8) \\ (4*1)+(9*6)+(-3*1) & (4*3)+(9*7)+(-3*5) & (4*-4)+(9*5)+(-3*8) \end{pmatrix}$$

4) $C\ x\ D$

$$CxD = \begin{pmatrix} 4+30+9 & 12+35+45 & -16+25+72 \\ -3+48+6 & -9+56+30 & 12+40+48 \\ 4+54-3 & 12+63-15 & -16+45-24 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 43 & 92 & 81 \\ 51 & 77 & 100 \\ 55 & 60 & 5 \end{pmatrix}$$

5) $CT\ x\ D$

$$C^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 6 & 7 & 5 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$CxD = \begin{pmatrix} (4*1)+(5*6)+(9*1) & (4*3)+(5*7)+(9*5) & (4*-4)+(5*5)+(9*8) \\ (-3*1)+(8*6)+(6*1) & (-3+3)+(8*7)+(6*5) & (-3*-4)+(8*5)+(6*8) \\ (4*1)+(9*6)+(-3*1) & (4*3)+(9*7)+(-3*5) & (4*-4)+(9*5)+(-3*8) \end{pmatrix}$$

$$C^T xD = \begin{pmatrix} 4-18+4 & 12-21+20 & -16-15+32 \\ 5+48+9 & 15+56+45 & -20+40+72 \\ 9+36-3 & 27+42-24 & -36+30-24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10 & 11 & 1 \\ 62 & 116 & 92 \\ 42 & 45 & -30 \end{pmatrix}$$

6) $C\ x\ DT$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ -3 & 8 & 6 \\ 4 & 9 & -3 \end{pmatrix} \; D^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \\ -4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$CxD = \begin{pmatrix} (4*1)+(5*6)+(9*1) & (4*3)+(5*7)+(9*5) & (4*-4)+(5*5)+(9*8) \\ (-3*1)+(8*6)+(6*1) & (-3+3)+(8*7)+(6*5) & (-3*-4)+(8*5)+(6*8) \\ (4*1)+(9*6)+(-3*1) & (4*3)+(9*7)+(-3*5) & (4*-4)+(9*5)+(-3*8) \end{pmatrix}$$

$$CxD^T = \begin{pmatrix} 4+15-36 & 24+35+45 & 4+25+72 \\ -3+24-24 & -18+56+30 & -3+45+48 \\ 4+27+12 & 24+63-15 & 4+45-24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -17 & 104 & 101 \\ -3 & 68 & 90 \\ 43 & 72 & 25 \end{pmatrix}$$

7) *A x C*

$$AxC = \begin{pmatrix} (5*4)+(-2*-3)+(3*4) & (5*5)+(-2*8)+(3*9) & (5*9)+(-2*6)+(3*-3) \\ (9*4)+(2*-3)+(1*4) & (9*5)+(2*8)+(1*9) & (9*6)+(2*6)+(1*-3) \\ (7*4)+(7*-3)+(-8*4) & (7*5)+(7*8)+(-8*9) & (7*9)+(7*6)+(-8*-3) \end{pmatrix}$$

$$AxC = \begin{pmatrix} 20+6+12 & 25-16+27 & 45-12-9 \\ 36-6+4 & 45+16+9 & 54+12-3 \\ 28-21-32 & 35+56-72 & 63+42+24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 38 & 36 & 24 \\ 34 & 70 & 63 \\ -25 & 19 & 129 \end{pmatrix}$$

8) *A x D*

AxD

$$= \begin{pmatrix} (5*1)+(-2*6)+(3*1) & (5*3)+(-2*7)+(3*5) & (5*-4)+(-2*5)+(3*8) \\ (9*1)+(2*6)+(1*1) & (9*3)+(2*7)+(1*5) & (9*-4)+(2*5)+(1*8) \\ (7+1)+(7*6)+(-8*1) & (7*3)+(7*7)+(-8*5) & (7*-4)+(7*5)+(-8*8) \end{pmatrix}$$

$$AxD = \begin{pmatrix} 5-12+3 & 15-14+15 & -20-10+24 \\ 9+12+1 & 27+14+5 & -36+10+8 \\ 7+42-8 & 21+49-40 & -28+35-64 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 16 & -6 \\ 22 & 46 & -18 \\ 41 & 30 & -57 \end{pmatrix}$$

9) B x C

BxC

$$= \begin{pmatrix} (4*4)+(9*-3)+(1*4) & (4*5)+(9*8)+(1*9) & (4*9)+(9*6)+(1*-3) \\ (-9*4)+(2*-3)+(2*4) & (-9*5)+(2*8)+(2*9) & (-9*9)+(2*6)+(2*-3) \\ (5*4)+(8*-3)+(1*4) & (5*5)+(8*8)+(1*9) & (5*9)+(8*6)+(1*-3) \end{pmatrix}$$

$$BxC = \begin{pmatrix} 8-27+4 & 20+72+9 & 36+54-3 \\ -36-6+8 & -45+16+18 & -81+12-6 \\ 20-24+4 & 25+64+9 & 45+48-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 101 & 87 \\ -34 & -11 & -75 \\ 0 & 98 & 90 \end{pmatrix}$$

10)B x D

BxD

$$= \begin{pmatrix} (4*1)+(9*6)+(1*1) & (4*3)+(9*7)+(1*5) & (4*-4)+(9*5)+(1*8) \\ (-9*1)+(2*6)+(2*1) & (-9*3)+(2*7)+(2*5) & (-9*-4)+(2*5)+(2*8) \\ (5*1)+(8*6)+(1*1) & (5*3)+(8*7)+(1*5) & (5*-4)+(8*5)+(1*8) \end{pmatrix}$$

$$BxD = \begin{pmatrix} 4+54+1 & 12+63+5 & -16+45+8 \\ -9+12+2 & -27+14+10 & 27+10+16 \\ 5+48+1 & 15+56+5 & -20+40+8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 59 & 80 & 37 \\ 5 & -3 & 53 \\ 54 & 76 & 28 \end{pmatrix}$$

1.2. Matriz elemental

Sea la matriz $E \in M_n$, se dice que es una matriz elemental si se obtiene a partir de la matriz identidad $I \in M_n$, con una sola operación elemental de fila.

Ejemplo: Las siguientes matrices son elementales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Las siguientes matrices No son elementales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema: Sea e una operación elemental de fila y sea $E \in M_n$, la matriz elemental tal que $e(M_n) = E$, entonces: $(\forall A \in M_{mxn}) \Rightarrow e(A) = E : A$.

Ejemplo: Dala matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la operación elemental e, intercambio de dos filas. Verificar que $e(A) = E: A$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{F_1 \leftrightarrow F_2} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Debemos tener una matriz E_{2x2}, siendo esta $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto:

$$E.A = \begin{pmatrix} 0*(-2)+1*1 & 0*(-1)+1*1 & 0*(3)+1*2 \\ 1*(-2)+0*1 & 1*(-1)+0*1 & 1*(3)+0*2 \end{pmatrix} \Rightarrow e(A) = E: A$$

1.3. Ejercicios propuestos de matrices

1) Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ -8 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ y D = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ resolver las siguientes operaciones de matrices:

a) C – D – B
b) $C^T - D^T - B^T$
c) A + C – D
d) $A^T + C^T - D^T$
e) B + A – C
f) $B^T + A^T - C^T$
g) D – A – C
h) $D^T - A^T - C^T$
i) A + B + C + D
j) $A^T + B^T + C^T + D^T$
k) A – B + C – D
l) $A^T - B^T + C^T - D^T$

m) $A + B - C + D$

n) $A^T + B^T - C^T + D^T$

o) $A - B - C - D$

p) $D + A - B + C$

q) $D^T + A^T - B^T + C^T$

r) $A^T - B^T - C^T - D^T$

2) Considerando las matrices del primer ejercicio y que $\beta = \frac{\sqrt{7}}{6}$; $\delta = \frac{9}{4}$ y $\alpha = \frac{5}{6}$, realice las siguientes operaciones:

a) βA

b) βB

c) βC

d) βD

e) δA

f) δB

g) δC

h) δD

i) αA

j) αB

k) αC

l) αD

3) Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & -4 & -8 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 6 \\ 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Si es posible resolver los siguientes productos entre matrices:

a) $A \; x \; B$

a. $B^T \; x \; D$

b. $B \; x \; D^T$

c. $C \; x \; D$

d. $C^T \; x \; D$

e. $C \; x \; D^T$

f. $A \; x \; C$

g. $A\ x\ D$

h. $B\ x\ C$

$i.$ $B\ x\ D$

Matriz inversa

Las matrices son una herramienta valiosa en todas las ramas de las matemáticas, pero, sobre todo, lo son cuando son matrices inversibles (es decir, con inversa). Existen muchos y diversos métodos para la obtención de la matriz inversa, cada uno de ellos con sus ventajas y desventajas

Definición: Sea la matriz $A \in M_{mxn}$, existe una matriz $B \in M_{nxm}$, tal que $A.B = I_m$, a la matriz B se la denomina **matriz inversa de A por la derecha**.

Definición: Sea la matriz $A \in M_{mxn}$, existe una matriz $B \in M_{nxm}$, tal que $B.A = I_m$, a la matriz B se la denomina **matriz inversa de A por la izquierda**.

Definición: Sea la matriz $A \in M_n$, existe una matriz $B \in M_n$, tal que $A{:}B = B.A = I_m$, a la matriz B se la denomina **matriz inversa de A**.

A la matriz inversa de A, se la nota A^{-1}, y esta es única es decir: $\forall A, B, C \in M_n$, tal que $A.B = I$ y $C.A = I$, entonces $B = C$ y es la matriz inversa de A.

Propiedades:

i. Si $A \in M_n$ es inversible, entonces A^{-1} es inversible, es decir: $(A^{-1})^{-1} = A$.

ii. Si $A, B \in M_n$ son inversibles, entonces $A.B$ es inversible y cumple con: $(A.B)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$

iii. Toda matriz elemental es inversible

Si $A \in M_n$ es inversible y si una sucesión finitas de operaciones elementales de fila reducen a la matriz A en la matriz identidad I, entonces si se aplica la misma sucesión finita de operaciones elementales de fila a la matriz identidad I, dan como resultado a la matriz inversa A^{-1}.

Ejemplos resueltos de matriz inversa:

1) Hallar la matriz inversa de: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

1.- Aumentamos la matriz de identidad: El proceso consiste en convertir la primera matriz en identidad, de esa manera la segunda matriz se convertirá en inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & | & 1 & 0 \\ 4 & -5 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}_{F_2=F_2-4F_1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 7 & | & -4 & 1 \end{pmatrix}_{F_2=\frac{1}{7}F_2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}_{F_1=F_1+3F_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & | & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(1 * -\frac{5}{7}\right) + (-3 * -\frac{4}{7}) & \left(1 * \frac{3}{7}\right) + (-3 * \frac{1}{7}) \\ \left(4 * -\frac{5}{7}\right) + (-5 * -\frac{4}{7}) & \left(4 * \frac{3}{7}\right) + (-5 * \frac{1}{7}) \end{pmatrix}$$

$$A * A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} + \frac{12}{7} & \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \\ -\frac{20}{7} + \frac{20}{7} & \frac{12}{7} - \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Dada la matriz : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, encontrar la inversa A^{-1}

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_2=F_2-4F_1 \\ F_3=F_3+2F_1}}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 7 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_3=\frac{1}{9}F_3}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 7 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{array}\right)_{F_2=F_2+12F_3}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{4}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{array}\right)_{\substack{F_2=\frac{1}{7}F_2 \\ F_1=F_1-3F_3}}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{4}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{array}\right)_{\substack{F_1=F_1+2F_2 \\ F_2\leftrightarrow F_3}}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{21} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{4}{21} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{21} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{21} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{21} & \frac{1}{7} & \frac{4}{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -1 & 6 & -1 \\ \frac{14}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si es inversible, determine A^{-1}

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_2=F_2-3F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_1=F_1+\frac{1}{2}F_2 \\ F_3=F_3-\frac{1}{2}F_2}} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)_{\substack{F_2=-\frac{1}{4}F_2 \\ F_3=\frac{1}{2}F_3}}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right)_{\substack{F_1=F_1+F_3 \\ F_2=F_2-2F_3}} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right)_{\substack{F_1=F_1+F_3 \\ F_2=F_2-2F_3}} = (I \mid A^{-1})$$

Por lo tanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, y se puede probar que: $A.A^{-1} = I$

$A.A^{-1}$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1*(-1)+2*1+3*1 & 1*1+2*1+3*(-1) & 1*2+2*(-4)+3*2 \\ 3*(-1)+2*1+1*1 & 3*1+2*1+1*(-1) & 3*2+2*(-4)+1*2 \\ 1*(-1)+0*1+1*1 & 1*1+0*1+1*(-1) & 1*2+0*(-4)+1*2 \end{pmatrix}$$

$$A.A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

1.4. Ejercicios propuestos de matriz inversa

Calcular la inversa de las siguientes matrices por el Método de Gauss Jordán

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 \\ -8 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 6 \\ 5 & -10 & -16 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Otros tipos de matrices

En esta sección se presentarán algunos tipos de matrices como:

i. La **Matriz fila**, que está constituida por una sola fila y n columnas: $A = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$
ii. La matriz columna, la cual tiene una sola columna y m filas: $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$
iii. Una matriz $A \in M_n$, se la llama **matriz nilpotente** de orden p, sí y solo sí p es el menor número entero positivo tal que $A^p = 0_n$, es decir si la matriz elevada a la potencia p, da como resultado la matriz nula.

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, demostrar si es una matriz nilpotente y el orden en caso de serlo

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

La matriz A es nilpotente de orden 3.

iv. Una matriz $A \in M_n$, se la llama **matriz Idempotente** si y solo sí $A^2 = A$, es decir si al elevar la matriz al cuadrado, da como resultado la misma matriz A.

Ejemplo: Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, es Idempotente.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

v. Una matriz $A \in M_n$, se la llama **matriz Involutiva** si y solo sí $A^2 = I$, es decir si al elevar la matriz al cuadrado, da como resultado la matriz identidad I.

Ejemplo: Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, es Involutiva.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

vi. Una matriz $A \in M_n$, se la llama **matriz Ortogonal** si y solo sí $A^T.A = I$, es decir si al elevar la matriz al cuadrado, da como resultado la matriz identidad I.

Ejemplo: Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, es Involutiva.

$$A^T.A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

vii. Una matriz $A \in M_{mxn}(\mathbb{C})$, se la llama **matriz Conjugada** de A, al conjugar todos los elementos de la matriz A, representada por: $\bar{A} = \left(\overline{a_{1,J}}\right)_{mxn}$.

Ejemplo: Encontrar la matriz conjugada de $A = \begin{pmatrix} i & 1-i & 3 \\ -1 & 2+5i & 7i \end{pmatrix}$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -i & 1+i & 3 \\ -1 & 2-5i & -7i \end{pmatrix}$$

viii. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$, se la llama **matriz hermitiana** de la matriz cuadrada A, si y solo sí la transpuesta de la matriz A es igual a la conjugada de A $A^T = \bar{A}$

Ejemplo: Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1-3i & -i \\ 1+3i & 5 & -7+i \\ i & -7-i & 3 \end{pmatrix}$, es hermitiana

$\bar{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1+3i & i \\ 1-3i & 5 & -7-i \\ -i & -7+i & 3 \end{pmatrix}$ y $A^T = \begin{pmatrix} -3 & 1+3i & i \\ 1-3i & 5 & -7-i \\ -i & -7+i & 3 \end{pmatrix}$,

por lo tanto $A^T = \bar{A}$

Observar que una matriz hermitiana, necesariamente debe tener números reales en los elementos de la diagonal positiva de la matriz.

ix. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$, se la llama **matriz unitaria** de la matriz cuadrada A, si y solo sí la transpuesta de la matriz A por la conjugada de A es igual a la matriz identidad, es decir: $A^T\bar{A} = I$

Ejemplo: Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix}$, es unitaria.

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix} \text{ y } \bar{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix}, \text{ por lo tanto}$$

$$A^T\bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

x. Sea la matriz $A = (a_{i,j}) \in M_n(k)$, se la llama **traza de la matriz** cuadrada A, al número que resulta de sumar todos los elementos de la diagonal positiva o principal de la matriz y se representa por: $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Ejemplo: Sean: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Determinar la traza de las matrices $A.B$ y B.A.

$$A.B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -8 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow Tr(A.B)$$
$$= -8 + 14 = 6$$

$$B{:}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & 2 \\ 5 & 9 & 6 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Tr(B.A)$$
$$= -1 + 9 - 2 = 6$$

Determinantes

Esta sección vamos a estudiar el cálculo del determinante de matrices cuadradas. La función determinante tendrá como Dominio todas las matrices cuadradas $A_{n\times n}$ y como rango en conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Y se la notara como $det(A)$ o $|A|$ y definida por: $det{:}\, M_{nxn} = k$

Conveniente recordar las definiciones de *menor*, *cofactor*, *filas* y *columnas* estudiados en la sección de matrices, así como la asignación de los subíndices para los términos o elementos de una matriz.

Para un término cualquiera a_{ij}, de una matriz $A_{n\times n}$, el primer subíndice será el número de la $i - ésima$ fila para $i = 1, 2, \dots, i = n$ y j, será el número de la $j - ésima$ columna para $j = 1, 2, \dots, j = n$.

Menor de una matriz

Definición: El *menor de una matriz A* de orden n, respecto un elemento a_{ij}, es una matriz de orden $n - 1$, que resulta de eliminar la

fila $i - ésima$ y la columna $j - ésima$ correspondiente a dicho elemento, es decir $A = (a_{i,j}) \in M_n$, el proceso del determinante por menores por la $r - ésima$ fila de A, se define como:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{r+j} a_{r,j} \left|A_r^j\right|$$

donde A_r^j, es la matriz que resulta de quitar la fila r y la columna j dela matriz A, para $j = 1,2,3, \dots n$

El desarrollo del determinante por menores por la $j - ésima$ columna de A, se define como:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \left|A_i^j\right|$$

donde A_i^j, es la matriz que resulta de quitar la fila i y la columna j dela matriz A, para $i = 1,2,3, \dots n$

Ejemplo: Determinar el menor del elemento a_{23} en la matriz dada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Esta es una matriz cuadrada de orden 3, para calcular el menor del término a_{23}, tal como se indicó en la definición, se procede a escribir otra matriz de orden $3 - 1 = 2$, eliminando la fila $i = 2$, y columna $j = 3$, entonces se tiene:

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicios Propuestos: Dada una matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Determinar los menores $a_{12}, a_{22}, a_{31}, a_{13}$.

Determinante de segundo orden

Dada una matriz A de orden 2, para calcular un determinante de la matriz A, denotado por $\det A$ o $|A|$ se aplica la siguiente fórmula:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ejemplos: Calcular el valor del determinante

1) $\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (-6)(5) - (-2)(3) = (-30) - (-6) = -30 + 6 = -24$

2) $\begin{vmatrix} x-1 & x \\ 2x-3 & 5 \end{vmatrix} = 5(x-1) - x(2x-3) =$
$= 5x - 5 - 2x^2 + 3x = -2x^2 + 8x - 5$

Ejercicios Propuestos de determinantes de segundo orden

Calcular los siguientes determinantes de segundo orden:

1) $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} -3 & -10 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 3 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} \lambda+3 & -\lambda \\ 2\lambda-1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda+2 \\ \lambda-1 & \lambda-7 \end{vmatrix}$

Determinante de orden $n \geq 2$

Definición: El determinante de una matriz A de orden $n \times n = [a_{ij}]$, es la suma de los n términos de la forma $(-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$, correspondiente a una fila o columna cualquiera de A. Para la fila 1, de coeficientes $a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}$, en forma simbólica se tendría

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} |M_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12} |M_{12}| + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} |M_{1n}|$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} |M_{1j}|$$

Ejemplo: Calcular el siguiente determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Se aplica este proceso utilizando la primera fila:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} |M_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12} |M_{12}| + (-1)^{1+3} a_{13} |M_{13}|$$

$$= (-1)^{1+1}(1) \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(2) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(3) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1)(6-4) + (-1)(2)(3-12) + (1)(3)(-1+6) = 2 + 18 + 15 = 35$$

Cofactor

Definición: El *cofactor de una matriz* A de orden n, respecto un elemento a_{ij}, es el valor dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

De acuerdo a esto, el valor del determinante de la fórmula anterior se podría escribir así:

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1j}C_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}C_{1j}$$

Esto se llama desarrollo por cofactores, en este caso, a lo largo de la primera fila. Pero se puede desarrollar a lo largo de cualquier fila o columna. El resultado es el mismo.

Los signos del cofactor depende de la posición de a_{ij}. Desarrollando el factor $(-1)^{i+j}$ para los valores de un determinante cualquiera, se obtiene la siguiente tabla de signos:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$= +(-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (0) + (1)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-2-1) - 0 + (3-4)$$

$$= -2(-3) + (-1) = 6 - 1 = 5$$

Ejemplo: Calcular el determinante de A, si:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución: Aplicar el desarrollo por cofactores a lo largo de la tercera columna, aprovechando que sus términos tienen valores cero, menos $a_{35} = -2$. Al desarrollar se tiene:

$$\det(A) = 0C_{31} - 0C_{32} + 0C_{33} - 0C_{34} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

Como se puede apreciar, los términos del desarrollo del determinante por cofactores darán cero en todos los productos a excepción de este valor $a_{35} = -2$. Por ello, a partir de ahora se omitirán todos los valores cuyos elementos sean igual a cero, es decir, que si $a_{ij} = 0$, entonces, el producto $a_{ij}C_{ij} = 0C_{ij} = 0$, y no hará falta considerarlo.

Ahora vemos que la columna 4 tiene cero a excepción del elemento $a_{43} = -1$. Al desarrollar el determinante a lo largo de la cuarta columna se tendrá:

$$\det A = (-2)(1)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Ahora, desarrollando el último determinante de orden 3 por cofactores a lo largo de la tercera fila, se tendrá:

$$detA = -2\left[\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2[(4+3)+4(-2-3)]\right] =$$

$$-2[7-20] = 26$$

Ejercicios Propuestos de determinantes empleando cofactores

Aplicando el proceso de desarrollo por cofactores, calcular el valor de los siguientes determinantes. Del 1 al 6 resuelva a lo largo de la fila o columna indicada, en los ejercicios 7 a 10 elija la fila o columna que más le convenga. En los ejercicios 11 y 12 resuelva lo solicitado, a partir del ejercicio 13 apliquen lo explicado en el último ejemplo.

1) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 7 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 5 & -3 & 10 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & -6 \\ 3 & 7 & 10 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -2 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} -x & 3 & 2x \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -\lambda \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$

11) En el problemas 9, encuentre el valor de x, para que el determinante sea igual a 0.

12) En los problemas 10, ¿cuáles serían los valores de λ, para que el determinante sea igual a 2

13) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 & -5 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

1.5. Método de Sarrus

La **regla de Sarrus** nos sirve para resolver de manera muy sencilla el determinante de una matriz de nxn, y radica en incorporar $n-1$ filas para poder identificar de forma fácil las diagonales positivas y diagonales negativas.

Sea la matriz $3x3$ es: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Se calcula como determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21} + a_{32}a_{13}) -$$

$$(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Si observamos, la mitad de los sumandos tienen signo " + " y la otra mitad signo " − " En este caso los productos positivos están formados por los elementos de la diagonal principal y sus dos paralelas multiplicadas por el elemento que está en el extremo opuesto. De manera análoga, los productos negativos están formados por los elementos de la diagonal secundaria y sus paralelas multiplicadas por el elemento extremo de las mismas. Este método es conocido como la **"regla de Sarrus".**

Por lo tanto se lo puede expresar como: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

Las diagonales azules se suman y las diagonales rojas se restan. En este caso, la zona sombreada de gris representa las dos primeras filas en la zona inferior.

Ejemplo: Encontrar el determinante de $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21} + a_{32}a_{13}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -11 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (3 * 3 * 8) + (-2 * -2 - 11) + (1 * 4 * 4) - (4 * 3 * -11)$$
$$- (-2 * 1 * 8) - (-2 * 4 * 3)$$

$$|A| = 72 - 44 + 16 + 132 + 16 + 24 = 216$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -11 & 4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = [(3 * 3 * 8) + (1 * 4 * 4) + (-11 * -2 * -2)] - [(1 * -2 * 8)$$
$$+ (3 * 4 * -2) + (-11 * 3 * 4)]$$

$$|A| = (72 + 16 - 44) - (-16 - 24 - 132) = 44 - (-172)$$

$$|A| = 44 + 172 = 216$$

Propiedades de los determinantes

i. Sea una matriz $A = (a_{i,j}) \in M_n$ triangular (superior o inferior), entonces el determinante de A es igual al producto de los elementos de su diagonal, es decir: $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$

   Ejemplo 1: Encontrar el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$|A| = -1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1) * 2 * 3 = -6 = \prod_{i=1}^{3} a_{i,i}$$

ii. Considerando las matrices cuadradas $A = \left(a_{i,j}\right)_n$ y $B = \left(b_{i,j}\right)_n$, tales que $\begin{cases} B_i = A_i \\ B_r = \alpha A_i \end{cases}$, donde α es un escalar, entonces $\det(b) = \alpha * \det(A)$, es decir si una fila o columna se multiplica por una constante k, el valor del determinante queda multiplicado por esa constante.

Ejemplo 2: Considerar la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, Por definición su determinante será:

$$det|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Multiplicando la primera fila por la constante k, se tiene: $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

El valor de este determinante, al desarrollar por cofactores a lo largo de la primera fila sería

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}C_{11} + ka_{12}C_{12} + ka_{13}C_{13}$$

Al extraer el factor común k, se obtiene:

$$= k(a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13})$$

Y la expresión entre paréntesis es el valor del determinante de la matriz A, por lo que:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k * detA$$

Según este resultado, también se podría extraer un factor común de todos los elementos de una fila o columna como parte del proceso, al final el determinante obtenido queda multiplicado por esos factores comunes extraídos.

Ejemplo 3: Extraer el factor común de una fila o columna en los siguientes determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 * \det(B)$$

Se extrajo el factor común 3 de la fila 2. Así mismo, tener en cuenta que, al multiplicar un determinante por un escalar k, el escalar, sólo multiplica a una fila o columna.

$$det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) * 6 * (-1) + (-3) * (-1) * 1 + 2 * 0 * -9$$
$$- [2 * 6 * 1 + (-9) * (-1)(-2) + (-1) * 0 * -3]$$
$$= 12 + 3 + 0 - 12 + 18 + 0 = 21$$

$$\det(A) = 3 * \det(B) = 3 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 * [(-2) * 2 * (-1) + (-1) * (-1) + 2 * 0 * (-3) - 2 * 2 * 1 - (-3)$$
$$* (-1)(-2) - (-1) * 0 * (-1)]$$
$$= 3 * [4 + 1 + 0 - 4 + 6 + 0] = 3 * 7 = 21$$

Ejemplo 4: Extraer el factor común de una fila o columna en los siguientes determinantes:

$$C = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 8 \\ -3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -20 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 4 * \det(D)$$

Se extrajo el factor común 4 de la columna 3. Así mismo, tener en cuenta que, al multiplicar un determinante por un escalar k, el escalar, sólo multiplica a una fila o columna.

$$det(C) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 8 \\ -3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) * 2 * (-20) + (-3) * (-1) * 8 + 2 * 0 * (-4)$$
$$- [2 * 2 * 8 + (-4) * (-1)(-2) + (-20) * 0 * -3]$$
$$= 80 + 24 + 0 - 32 + 8 + 0 = 80$$

$$\det(C) = 4 * \det(D) = 4 * \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 4 * \big[(-2) * 2 * (-5) + (-3) * (-1) * 2 + 2 * 0 * (-1)$$
$$- [2 * 2 * 2 + (-1) * (-1) * (-2) + (-5) * 0 * -3]\big]$$
$$= 4 * [20 + 6 + 0 - 8 + 2 + 0] = 4 * 20 = 80$$

Ejemplo 5: Realizar el producto del escalar por el escalar indicado:

$$k \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2k & 0k & k \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3k & 2k & -k \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -2k & 0 & 1 \\ -3k & 2 & -1 \\ 2k & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Cualquiera de los desarrollos del producto del determinante dado por el escalar k, es correcto y depende de las instrucciones específicas o de la libre elección de quien desarrolla el proceso.

iii. Si todos los elementos de una fila o columna de un determinante son ceros, el valor del determinante es cero, es

decir sea la matriz $A = \left(a_{i,j}\right)_n$, tal que $A_r = 0$ todos los elemento de la fila $r - ésima$ son nulos, entonces el $\det(A) = 0$

Ejemplo 6: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0C_{11} + 0C_{12} + 0C_{13} = 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

iv. Sea la matriz $A = \left(a_{i,j}\right)_n$, entonces $\det(\alpha * A) = \alpha^n * \det(A)$, es decir si multiplicamos a la matriz A por un escalar, el determinante será igual a producto del determinante de la matriz A por α^n, donde n es el orden de la matriz.

$$A = \left(a_{i,j}\right)_2 \Rightarrow |\alpha * A| = \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha * a_{1,1} & \alpha * a_{1,2} \\ \alpha * a_{2,1} & \alpha * a_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\alpha * A) &= \alpha * a_{1,1} * \alpha * a_{2,2} - \alpha * a_{2,1} * \alpha * a_{1,2} \\ &= \alpha^2 * a_{1,1} * a_{2,2} - \alpha^2 * a_{2,1} * a_{1,2} \\ &= \alpha^2 * \left[a_{1,1} * a_{2,2} - a_{2,1} * a_{1,2}\right] \end{aligned}$$

$$\det(\alpha * A) = \alpha^2 * \det(A)$$

Ejemplo 7: Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, determinar $\det(5 * A)$

$$5 * A = \begin{bmatrix} 5*1 & 5*2 \\ 5*1 & 5*(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\det(5 * A) = 5 * (-15) - (5 * 10) = -75 - 50 = -125$$

$$\det(5 * A) = (5)^2 * \det(A) = (5)^2 * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (5)^2 * [1 * (-3) - 1 * 2]$$
$$= 25 * (-3 - 2) = -125$$

Ejemplo 8: Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, determinar $\det(2 * A)$

$$5 * A = \begin{bmatrix} 2*1 & 2*0 & 2*3 \\ 2*1 & 2*-2 & 2*0 \\ 2*-1 & 2*0 & 2*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det(2 * A) = 2 * (-4) * 6 + 2 * 0 * 6 + (-2) * 0 * 0$$
$$- [6 * (-4) * (-2) + 2 * 0 * 0 + 6 * 0 * 2]$$
$$= -48 + 0 + 0 - 48 + 0 + 0 = -96$$

$$\det(2 * A) = (2)^3 * \det(A) = (2)^3 * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (2)^3$$
$$* \big[1 * (-2) * 3 + 1 * 0 * 3 + (-1) * 0 * 0$$
$$- [3 * (-2) * (-1) + 1 * 0 * 0 + 3 * 0 * 1]\big]$$
$$= 8 * (-6 + 0 - 0 - 6 + 0 + 0) = 8 * (-12) = -96$$

v. Si se intercambian dos filas o columnas distintas y cualquiera entre sí, el valor del determinante cambia de signo.

Ejemplo 9: $\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 0 + 1 * \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -2(-2-1) + (3-4) = 6 - 1 = 5$$

Si intercambian la segunda y tercera fila:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -2(1+2) + (4-3) =$$

$$-2(3) + (1) = -6 + 1 = -5$$

vi. Si en una matriz cuadrada, dos filas o columnas son iguales, entonces el determinante es cero.

Ejemplo 10: Sea la matriz $A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, encontrar el $\det(A)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 + 1 * \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -2(-2+2) + (-6+6) = 0$$

Por ser iguales la segunda y tercera fila.

Ejemplo 11: Sea la matriz $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$, encontrar el $\det(A)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 * \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -2(1-1) - 1 * (3+2) + 1 * (3+2) = 0 - 5 + 5 = 0$$

Por ser iguales las segunda y tercera columnas.

vii. Si a una fila o columna, se suma otra fila o columna multiplicada por un escalar, el determinante sigue siendo el mismo.

Dado el determinante de tercer orden $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, se va a sumar, a la primera fila, la segunda multiplicada por una escalar k:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} + & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_{F_1 = F_1 + kF_2} =$$

Desarrollando el determinante a lo largo de la primera fila, se obtiene:

$$= (a_{11} + ka_{21})C_{11} + (a_{12} + ka_{22})C_{12} + (a_{13} + ka_{23})C_{13}$$

Aplicando la propiedad distributiva, se obtiene:

$$= a_{11}C_{11} + ka_{21}C_{11} + a_{12}C_{12} + ka_{22}C_{12} + a_{13}C_{13} + ka_{23}C_{13}$$

Agrupando los términos y extrayendo el factor común k en la segunda agrupación, se obtiene:

$$= (a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}) + k(a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + a_{23}C_{13})$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Al observar el segundo término, se ve que las filas primera y segunda son iguales y por la propiedad (1.8.4) se sabe que ese determinante es nulo, por lo que:

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Que resulta ser el mismo determinante propuesto al inicio.

Nótese que k puede ser cualquier número real. Si $k = 1$, equivale a decir que a una fila se suma otra y si $k = 0$, se mantendría el mismo determinante inicial.

viii. Si en una matriz cuadrada, una de sus filas es múltiplo de otra fila , entonces $\det(A) = 0$

Ejemplo 12: Encontrar el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 9 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 9 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}_{F_2=3*F_1} = 3\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) * \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 * (-3 - 12) + (9 - 0) + 2 * (18 - 0)$$

$$= -45 + 9 + 36 = 0$$

ix. Sea la matriz $A = \left(a_{i,j}\right)_n$, entonces: $\det(A) = \det\left(A^T\right)$,

Sea la matriz cuadrada $A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \left(a_{1,1} * a_{2,2}\right) - \left(a_{1,2} * a_{2,1}\right)$

$$A^T = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \left(a_{1,1} * a_{2,2}\right) - \left(a_{1,2} * a_{2,1}\right)$$

Ejemplo 13: Calcular el determinante de la matriz transpuesta de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 + 3 * \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 * (-1 - 4) + 3 * (-4 - 1) = -5 - 15 = -20$$

$$\det(A^T) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-2) * \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 * (-1 - 4) + 2 * (0 - 6) + 1 * (0 - 3) = -5 - 12 - 3$$

$$= -20$$

x. Sea la matriz $A = \left(a_{i,j}\right)_n$ y $B = \left(b_{i,j}\right)_n$, entonces: $\det(A.B) = \det(A) * \det(B)$

Ejemplo 14: Sean las matrices $A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ y $B = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, demostrar que $\det(A.B) = \det(A) * \det(B)$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 * \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 1 * \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 * (-1 - 3) + 1 * (2 + 1) = 4 + 3 = 7$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 3 * \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 * (-1 - 2) + 1 * (-3 + 2) = 9 - 1 = 8$$

$$\det(A.B) = \det(A) * \det(B) = (7) * (8) = 56$$

$$A * B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 16 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A * B) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 16 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 2 * (48 - 20) = 56$$

xi. Sea la matriz $A = \left(a_{i,j}\right)_n$, entonces $\det(A^p) = [det(A)]^p$, siendo $A^p = A_1 * A_2 * \dots \dots . * A_p$

1.6. Determinantes de matrices inversibles

Teorema: Sea la matriz $A = \left(a_{i,j}\right)_n$ que tenga inversa, entonces el determinante de la matriz es diferente de cero $|A| \neq 0$, además el determínante de la matriz inversa es igual a la inversa del determinante de la matriz $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular el $det(A^{-1})$

El determínate de la matriz es igual a: $det(A) = [(1 * 2 * 1) + 0 + (1 * 2 * 1)] - [(3 * 2 * 1) + 0 + (1 * 2 * 3)] = -8$

Y se puede encontrar el $det(A^{-1}) = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

Empleado el método de la matriz extendida se puede determinar que la matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Y como método de comprobación se puede calcular: $det(A^{-1}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 [(-1 * 1 * 2) + (1 + (-1) * 2) + (1 * 1 * (-4))] - \left[(1 * 1 * 2) + \left((-4) * (-1) * (-1)\right) + (2 * 1 * 1)\right] = \left(\frac{1}{4}\right)^3 (-8) = -\frac{8}{64} = -\frac{1}{8}$

Definición: Sea la matriz $A = \left(a_{i,j}\right)_n \in M_n$, en la cual el $i, j -$ é*simo* $\boldsymbol{cofactor}$ de la matriz cuadrada A representada por $A_{i,j}$, está definido por: $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\left|A_i^j\right|$. Además la matriz de cofactores de A, esta dada por: $Cof(A) = \left(A_{i,j}\right)_n$, donde A_{ij} es un numero escalar.

Ejemplo: Determinar la matriz de cofactores de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A_{1,1} = (-1)^{1+1}|A_1^1| = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{1,2} = (-1)^{1+2}|A_1^2| = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{1,3} = (-1)^{1+3}|A_1^3| = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{2,1} = (-1)^{2+1}|A_2^1| = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{2,2} = (-1)^{2+2}|A_2^2| = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{2,3} = (-1)^{2+3}|A_2^3| = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{3,1} = (-1)^{3+1}|A_1^1| = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{1,2} = (-1)^{3+2}|A_3^2| = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{3,3} = (-1)^{3+3}|A_3^3| = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

Por lo tanto: $cof(A) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -10 \\ 0 & -1 & 0 \\ -10 & -3 & 15 \end{pmatrix}$

Teorema: Sea la matriz cuadrada, $A = \left(a_{i,j}\right)_n \in M_n$, en la cual $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{j,k} = 0$, para todo i, j que cumpla la condición está definido por: $i \neq j$.

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y del el ejemplo anterior sabemos que la matriz de cofactores es: $cof(A) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -10 \\ 0 & -1 & 0 \\ -10 & -3 & 15 \end{pmatrix}$, por lo tanto determinar: $\sum_{k=1}^{3} a_{3,k}A_{2,k}$ y $\sum_{k=1}^{3} a_{1,k}A_{3,k}$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{3,k}A_{2,k} = (2 * 0) + \big(0 * (-1)\big) + (1 * 0) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{1,k}A_{3,k} = (3 * (-10)) + \big(0 * (-3)\big) + (2 * 15) = 0$$

Definición: Sea la matriz $A = \left(a_{i,j}\right)_n \in M_n$, se denomina matriz $Adjunta$ de la matriz cuadrada A la matriz transpuesta de la matriz de cofactores de A, representada por: $adj(A) = \big(cof(A)\big)^T$, donde A_{ij} es un numero escalar.

Ejemplo: Determinar la matriz adjunta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Del ejemplo anterior, sabemos que la matriz de cofactores es igual a: $cof(A) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -10 \\ 0 & -1 & 0 \\ -10 & -3 & 15 \end{pmatrix}$, por lo tanto: $adj(A) = \left(cof(A)\right)^T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -10 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

Teorema: Sea la matriz $A = \left(a_{i,j}\right)_n \in M_n \Rightarrow A * adj(A) = |A| * I_n$, es decir, el producto de la matriz A por la matriz $adj(A)$ es igual al producto del determinante de la matriz A por la matriz identidad.

Ejemplo: Considerando la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demostrar $* adj(A) = |A| * I_3$

$$A * adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -10 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A * adj(A) = (-5)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-5) * I_3$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 * 5 + 2 * (-10)$$

$$= 15 - 20 = -5$$

$$|A| * I_3 = (-5) * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Teorema: Sea la matriz $A = \left(a_{i,j}\right)_n \in M_n$, la matriz A tiene inversa, si y solo si su determinante es diferente de cero, es decir $|A| \neq 0$, Además la matriz inversa de A es igual al producto de la inversa de su determínate por la matriz $adj(A)$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * adj(A)$$

Ejemplo: Encontrar la matriz inversa de $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Del ejemplo anterior sabemos que $|A| = -5$, y este es diferente de cero, por lo tanto la matriz A, tiene inversa. Además se conoce que la matriz $adj(A) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -10 & 0 & 15 \end{pmatrix}$, y la matriz inversa se puede determinar como sigue:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} * adj(A) = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -10 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{-5} & \frac{0}{-5} & \frac{-10}{-5} \\ \frac{2}{-5} & \frac{-1}{-5} & \frac{-3}{-5} \\ \frac{-10}{-5} & \frac{0}{-5} & \frac{15}{-5} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Para verificar si es la matriz inversa se puede hacer el producto de $A * A^{-1} = I$

$$A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$A * A^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 3 * (-1) + 0 + 2 * 2 & 0 + \frac{1}{5} * 0 + 0 & 2 * 3 + 0 * \frac{3}{5} + 2 * (-3) \\ 0 - \frac{2}{5} * 5 + 2 * 1 & 0 + \frac{1}{5} * 5 + 0 & 2 * 0 + 5 * \frac{3}{5} + 1 * (-3) \\ 2 * (-1) + 0 + 2 * 1 & 2 * 0 + 0 * \frac{1}{5} + 0 * 1 & 2 * 2 + 0 * \frac{3}{5} + 1 * (-3) \end{pmatrix}$$

$$A * A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 + 4 & 0 & 6 - 6 \\ -2 + 2 & 1 & 3 - 3 \\ -2 + 2 & 0 & 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Introducción

La combinación entre matrices y sistemas de ecuaciones lineales es un tema importante en el álgebra lineal y se aplica en muchos campos de ingeniería y economía. En este libro se la utilizará este proceso en el capítulo 3 durante el estudio de los espacios vectoriales, en el capítulo 4 para el cálculo de vectores coordenados, en el capítulo 6 para el cálculo de valores y vectores propios de una matriz y en ejercicios en que se plantee encontrar algún valor desconocido.

Los sistemas de ecuaciones tienen aplicación en ingeniería, economía y otras ciencias. Por ejemplo, Leontief (Premio Nobel de Economía, 1973), en 1949, dividió la economía de los Estados Unidos en 500 sectores, para cada sector escribió una ecuación lineal en que especificaba cómo este sector se relacionaba con los otros sectores, es decir, obtuvo un sistema de ecuaciones de 500 ecuaciones con 500 incógnitas, obviamente, este tipo de sistemas de ecuaciones, no se resuelve manualmente, para ello existen programas computacionales cada vez más potentes, pero que utilizan los conceptos y procesos estudiados en este libro.

En este capítulo se abordan diferentes métodos para resolver sistemas de ecuaciones: El método de Gauss Jordan que aplica las operaciones

elementales entre filas estudiado en el capítulo I; Método de determinantes, el cálculo de este valor se estudió en el capítulo I; El método de menores y cofactores que utiliza también algunos conceptos y definiciones ya estudiados en el capítulo I.

Como podrá entender el lector, los temas estudiados en el capítulo anterior son base para los nuevos contenidos del capítulo II. Esto va a ocurrir a lo largo de todo el libro, por lo que será muy oportuno, ir revisando los contenidos anteriores para el abordaje del nuevo tema o, volver sobre esos temas en caso de duda.

Resolver sistemas de ecuaciones lineales, permite analizar casos prácticos relacionadas con fenómenos de la vida diaria y poder predecir el comportamiento de los sistemas para la toma oportuna de decisiones, motivo por el cual en el álgebra lineal se estudia la solución de sistemas de ecuaciones lineales por diferentes métodos como los que describen en este apartado.

Métodos de Gauss Jordán

Este método debe su nombre a Carl Friedrich Gauss y a Wilhelm Jordán. Se trata de una serie de algoritmos del algebra lineal para determinar los resultados de un sistema de ecuaciones lineales y así hallar matrices e inversas. El sistema de Gauss se utiliza para resolver un sistema de ecuaciones y obtener las soluciones por medio de la reducción del sistema dado a otro que sea equivalente en el cual cada

una de las ecuaciones tendrá una incógnita menos. La matriz que resulta de este proceso lleva el nombre que se conoce como forma escalonada.

Este método, permite resolver hasta 20 ecuaciones simultáneas. Lo que lo diferencia del método Gaussiano es que cuando es eliminada una incógnita, se eliminará de todas las ecuaciones restantes, o sea, las que anteceden a la ecuación principal. De esta manera el paso de eliminación forma una matriz identidad en vez de una matriz triangular. El sistema de ecuaciones podrá presentar tres tipos de solución:

i. Sistema con solución única
ii. Sistema con infinidad de soluciones
iii. Sistema sin solución

Sistema con solución única

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación lineal por el método de Gauss Jordán: $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$

Solución: La matriz de coeficientes del sistema más la de los términos independientes se llama también matriz aumentada.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

En la matriz escalonada resolvemos las operaciones elementales en las filas de la matriz, usando la notación para las operaciones elementales en las filas

i. cf_i Nueva fila i de la matriz aumentada
ii. $f_i \leftrightarrow f_j$ Intercambio de la fila i con la fila j
iii. $af_i + f_i$ Nueva fila j de la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 10 \end{array}\right)_{\to f_2 - f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & 8 \end{array}\right)_{\to \frac{1}{8} f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)_{\to 3f_2 + f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el resultado del sistema de ecuaciones por Gauss Jordán es: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación por el método de Gauss Jordán: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \\ 4x - 2y + z = 3 \end{cases}$

Solución: Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)_{\substack{\to -3f_1 + f_2 \\ \to -4f_1 + f_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & 3 \end{array}\right)_{\to -\frac{1}{2} f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 5 & 3 \end{array}\right)_{\substack{\to f_2 - f_1 \\ \to 6f_2 + f_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)_{\to -1f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)_{\to f_3+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el resultado del sistema de ecuaciones por Gauss Jordán es: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación por el método de Gauss Jordán: $\begin{cases} 2a + 3b + c = 1 \\ 3a - 2b - 4c = -3 \\ 5a - b - c = 4 \end{cases}$

Solución: Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)_{\to \frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)_{\substack{\to -3f_1+f_2 \\ \to -5f_1+f_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)_{\to -\frac{2}{13}f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)_{\substack{\to -\frac{3}{2}f_2+f_1 \\ \to \frac{17}{2}f_2+f_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{10}{13} & -\frac{7}{13} \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & 0 & \frac{48}{13} & \frac{96}{13} \end{array}\right)_{\to \frac{13}{48}f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{10}{13} & -\frac{7}{13} \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)_{\substack{\to -\frac{11}{13}f_3+f_2 \\ \to \frac{10}{13}f_3+f_1}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el resultado del sistema de ecuaciones por Gauss Jordán es: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$

Sistema de ecuaciones lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si cada una de las ecuaciones esta igualada a cero:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots \dots . + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \dots \dots . + a_{2n}x_n = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \dots \dots . + a_{mn}x_n = 0$$

Los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos tienes solución:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots \dots = x_n = 0$$

Esta solución es llamada **solución trivial**, así un sistema homogéneo de ecuaciones lineales tiene solución única o tiene una infinidad de soluciones.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación lineal por el método de Gauss Jordán:

$$\begin{cases} 2p - 3q + r = 0 \\ p + q - r = 0 \\ 4p + 2q + 3r = 0 \end{cases}$$

Solución: Escribimos la matriz aumentada del sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$

Reordenamos las ecuaciones de la matriz aumentada con su primera fila del coeficiente de la segunda ecuación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)_{\to f_2 \leftrightarrow f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)_{\substack{\to -2f_1+f_2 \\ \to -4f_1+f_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)_{\to -\frac{1}{5}f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)_{\substack{\to -f_2+f_1 \\ \to 2f_2+f_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{8}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \end{array}\right)_{\to \frac{5}{3}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{8}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{\to -\frac{3}{5}f_3+f_2 \\ \to \frac{8}{5}f_3+f_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, se obtiene: $p = q = r = 0$, el sistema de ecuaciones lineales tiene solución única y es solución trivial.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación lineal por el método de Gauss Jordán:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\delta = 0 \\ 3\alpha - \beta - 2\delta = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \delta = 0 \end{cases}$$

Solución: Escribimos la matriz aumentada del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{\to -3f_1+f_2 \\ \to 1f_1+f_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)_{\to -\frac{1}{4}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)_{\substack{\to -1f_2+f_1 \\ \to -3f_2+f_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)_{\to -\frac{1}{3}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)_{\to -2f_3+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Luego, $\alpha = \beta = \delta = 0$, el sistema de ecuaciones lineales tiene solución única y es solución trivial.

Sistema de ecuaciones lineales con infinidad de soluciones

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación lineal por el método de Gauss Jordán: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ x + 3y - 4z = -1 \end{cases}$

Solución: Escribimos la matriz aumentada del sistema: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right)$

Reordenamos las ecuaciones de la matriz aumentada con su primera fila del coeficiente de la tercera ecuación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{\rightarrow -3f_1+f_3}{\rightarrow -2f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 6 \\ 0 & -7 & 11 & 6 \end{array}\right) \rightarrow -\frac{1}{7}f_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & -7 & 11 & 6 \end{array}\right) \underset{\rightarrow -3f_2+f_1}{\rightarrow 7f_2+f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Despejamos x, y en las dos ecuaciones

$$x + \frac{5}{7}z = \frac{11}{7} \qquad \Rightarrow x = \frac{11}{7} - \frac{5}{7}z$$

$$y - \frac{11}{7}z = -\frac{6}{7} \qquad \Rightarrow y = -\frac{6}{7} + \frac{11}{7}z$$

Expresamos $z = h, h \in \mathbb{R}$, el conjunto solución queda así:

$$\begin{cases} x = \frac{11}{7} - \frac{5}{7}z \\ y = -\frac{6}{7} + \frac{11}{7}z \\ z = h \end{cases}$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones lineales tiene una infinidad de soluciones.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación lineal por el método de Gauss Jordán:

$$\begin{cases} 5\alpha + 3\beta + \gamma + 2\delta = 1 \\ 2\alpha - \beta + 3\gamma + \delta = 2 \\ -3\alpha + 2\beta - 2\gamma + 3\delta = 3 \\ 2\alpha + 5\beta - \gamma + 5\delta = 4 \end{cases}$$

Solución: Escribimos la matriz aumentada del sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right)_{\to\frac{1}{5}f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right)_{\substack{\to -2f_1+f_2 \\ \to 3f_1+f_3 \\ \to -2f_1+f_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{11}{5} & \frac{13}{5} & \frac{1}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & \frac{19}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{21}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & \frac{19}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{21}{5} & \frac{18}{5} \end{array}\right)_{\to -\frac{5}{11}f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{8}{11} \\ 0 & \frac{19}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{21}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & \frac{19}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{21}{5} & \frac{18}{5} \end{array}\right)_{\substack{\to -\frac{3}{5}f_2+f_1 \\ \to -\frac{19}{5}f_2+f_3 \\ \to -\frac{19}{5}f_2+f_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{5}{11} & \frac{7}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{8}{11} \\ 0 & 0 & \frac{34}{11} & \frac{50}{11} & \frac{70}{11} \\ 0 & 0 & \frac{34}{11} & \frac{50}{11} & \frac{70}{11} \end{array}\right)_{\to\frac{11}{34}f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{10}{11} & \frac{5}{11} & \frac{7}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{8}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{25}{17} & \frac{35}{17} \\ 0 & 0 & \frac{34}{11} & \frac{50}{11} & \frac{70}{11} \end{array}\right)_{\substack{\to -\frac{10}{11}f_3+f_1 \\ \to \frac{13}{11}f_3+f_2 \\ \to -\frac{34}{11}f_3+f_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{15}{17} & -\frac{21}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{17} & \frac{29}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{25}{17} & \frac{35}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Despejamos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en las cuatro ecuaciones

$$\alpha - \frac{15}{17}\delta = -\frac{21}{17} \qquad \Rightarrow \alpha = -\frac{21}{17} + \frac{15}{17}\delta$$

$$\beta + \frac{28}{17}\delta = \frac{29}{17} \qquad \Rightarrow \beta = \frac{29}{17} - \frac{28}{17}\delta$$

$$\gamma + \frac{25}{17}\delta = \frac{35}{17} \qquad \Rightarrow \gamma = \frac{35}{17} - \frac{25}{17}\delta$$

$$0\delta = 0$$

Expresamos $\delta = h, h \in \mathbb{R}$, el conjunto solución queda así:

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{21}{17} + \frac{15}{17}h \\ \beta = \frac{29}{17} - \frac{28}{17}h \\ \gamma = \frac{35}{17} - \frac{25}{17}h \\ \delta = h \end{cases}$$

Demostrando que el sistema de ecuaciones lineales tiene una infinidad de soluciones.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación lineal por el método de Gauss Jordán:

$$\begin{cases} 2a - 3b + 4c = 0 \\ 3a - 2b + 2c = 0 \\ a - 4b + 6c = 0 \end{cases}$$

Solución: Escribimos la matriz aumentada del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right)_{\to f_3 \leftrightarrow f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right)_{\substack{\to -3f_1+f_2 \\ \to -2f_1+f_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & -16 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 0 \end{array}\right)_{\to \frac{1}{10}f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 0 \end{array}\right)_{\substack{\to 4f_2+f_1 \\ \to -5f_2+f_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Despejamos a, b en las dos ecuaciones

$$a - \frac{2}{5}c = 0 \qquad \Longrightarrow a = \frac{2}{5}c$$

$$b - \frac{8}{5}c = 0 \qquad \Longrightarrow b = \frac{8}{5}c$$

Expresamos $c = h, h \in \mathbb{R}$, el conjunto solución queda así:

$$\begin{cases} a = \frac{2}{5}c \\ b = \frac{8}{5}c \\ c = h \end{cases}$$

Concluyendo que el sistema de ecuaciones lineales tiene una infinidad de soluciones.

Sistema de ecuaciones lineales sin solución

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación lineal por el método de Gauss Jordán:

$$\begin{cases} x + 8y - 5z = 3 \\ 3x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 4 \end{cases}$$

Solución: Escribimos la matriz aumentada del sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{\to -3f_1+f_2 \\ \to -2f_1+f_3}}{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & -26 & 18 & -8 \\ 0 & -13 & 9 & -2 \end{array}\right) \underset{\to -2f_3+f_2}{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -13 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

En la segunda fila se tiene que las variables (x, y, z) es 0, quedando la igualdad $0 = -4$ que es una contradicción, $\therefore$, el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución.

Métodos del determinante

En un sistema el determinante de cada variable se forma cambiando la columna de las variables por la columna de los términos independientes, el valor del denominador de cada expresión es el determinante formado por los coeficientes de las variables, siempre que sea diferente de cero.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación por el método de determinante: $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$

$$Ds = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 3 = 8$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 30 = 40 \qquad Dy = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 2 = 8$$

$$x = \frac{Dx}{Ds} \qquad y = \frac{Dy}{Ds}$$

$$x = \frac{40}{8} \qquad y = \frac{8}{8}$$

$$x = 5 \qquad y = 1$$

Obteniendo como resultado del sistema de ecuaciones por determinante es: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación por el método de determinante: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \\ 4x - 2y + z = 3 \end{cases}$

$$Ds = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad Dy = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad Dz = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{Dx}{Ds} \qquad y = \frac{Dy}{Ds} \qquad z = \frac{Dz}{Ds}$$

$$x = \frac{2}{2} \qquad y = \frac{4}{2} \qquad z = \frac{6}{2}$$

$$x = 1 \qquad y = 2 \qquad z = 3$$

Por lo tanto, el resultado del sistema de ecuaciones por determinante es: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

Sistema de ecuaciones por el método de menores y cofactores

El sistema de ecuaciones se resume a calcular las determinantes de las matrices, para realizar ese cálculo se procede de la siguiente manera: Se debe tomar los elementos de la primera fila de la matriz objetivo, y

multiplicar, uno por uno, a la determinante que resulta de eliminar la fila y la columna en la que se encuentra el elemento por el que se está multiplicando, el cual debe mantener el signo en su parte superior, finalmente se procede a sumar, como se define a continuación:

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación por el método de Menores y Cofactores: $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$

$Ds = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1|5| + 3|1| = 8$

Método de los Cofactores (escalonamiento)

El método se basa en anular los elementos que están bajo la diagonal de la matriz extendida (triangular inferior), esto se realiza mediante la multiplicación de una fila, en la que se encuentra el pivote que es un elemento de la diagonal, por cofactores y sumándolas a la fila en la que se encuentra el elemento que se pretende anular, se explica mediante un ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Se pretende anular los números, para esto se usarán los elementos de la diagonal. Es importante aclarar, que las filas en un sistema de ecuaciones se pueden mover a voluntad, en este caso no se movieron debido a que lo ideal, es que el elemento que quede en la primera

posición de la diagonal sea 1, para simplificar el cálculo de los cofactores.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 10 \end{array}\right)_{\rightarrow f_2 - f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 8 & 8 \end{array}\right)$$

$x - 3y = 2$

$8y = 8$

$y = \frac{8}{8} = 1$

$x - 3y = 2$

$x - 3(1) = 2$

$x = 2 + 3$

$x = 5$

Es decir, el resultado del sistema de ecuaciones por menores y cofactores es: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación por el método de Cofactores:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \\ 4x - 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$Ds = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$1(1-2)-1(3+4)-1(-6-4)=-1-7+10=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)_{\substack{\to -3f_1+f_2 \\ \to -4f_1+f_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & 3 \end{array}\right)_{\to -\frac{1}{2}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 5 & 3 \end{array}\right)_{\to 6f_2+f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$x+y-z=0$	$y-z=-1$	$x+y-z=0$
$y-z=-1$	$y-3=-1$	$x+2-3=0$
$-z=-3$	$y=2$	$x-1=0$
$z=3$		$x=1$

Es decir, el resultado del sistema de ecuaciones por menores y cofactores es: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación por el método de Cofactores:

$$\begin{cases} x-2y+4z=12 \\ 2x-y+5z=18 \\ -x+3y-3z=-8 \end{cases}$$

$$Ds = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$1(3-15) + 2(-6+5) + 4(6-1) = -12 - 2 + 20 = 6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 2 & -1 & 5 & 18 \\ -1 & 3 & -3 & -8 \end{array}\right)_{\substack{\to -2f_1+f_2 \\ \to f_1-f_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)_{\to f_2 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{array}\right)_{\to -3f_2+f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right)$$

$x - 2y + 4z = 12$

$y + z = 4$

$-6z = -18$

$z = \dfrac{18}{6}$

$z = 3$

$y + z = 4$

$y + 3 = 4$

$y = 1$

$x - 2y + 4z = 12$

$x - 2 + 12 = 12$
$x = 2$

Por lo tanto, el resultado del sistema de ecuaciones por menores y cofactores es: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

Sistema de ecuaciones aplicando la regla de Cramer

La regla de Cramer proporciona la solución de sistemas de ecuaciones lineales **compatibles determinados** (con una única solución) mediante el cálculo de determinantes. Un sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matrices como:

$$AX = B$$

Donde:

- A es la matriz de coeficientes del sistema,
- X es la matriz de las variables,
- B es la matriz de los términos independientes de las ecuaciones.

Para poder aplicar Cramer, la matriz A tiene que ser cuadrada y el determinante tiene que ser distinto de 0. La **regla de Cramer** establece que la variable x_k de la solución del sistema, cuyos coeficientes están en la columna k de A, es

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|}$$

Donde A_k es la matriz A, cambiando su columna número k por la columna de términos independientes, B.

Sistema de dimensión $2x2$: $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$

La matriz de coeficientes del sistema es: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

La matriz de incógnitas es: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

La matriz de términos independientes es: $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 3 = 8 \neq 0$$

Se aplicar la regla de Cramer, donde la primera variable es x, cuyos coeficientes son los de la primera columna de A. La matriz A_1 es como A pero cambiando dicha columna por la columna B:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculamos x, donde $x = \frac{|A_1|}{|A|}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}}{|8|} = \frac{40}{8} = 5$$

La segunda incógnita es y y sus coeficientes son los de la segunda columna de A. Tenemos que calcular el determinante de la matriz:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Calculamos y: donde: $y = \frac{|A_2|}{|A|}$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}}{|8|} = \frac{8}{8} = 1$$

Es decir, el resultado del sistema de ecuaciones por Cramer es: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

Sistema de dimensión 3x3: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \\ 4x - 2y + z = 3 \end{cases}$

La matriz de coeficientes del sistema es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz de incógnitas es: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

La matriz de términos independientes es: $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Podemos aplicar la regla de Cramer. La matriz A_1 es como A pero cambiando la columna 1 por la columna B:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $x = \frac{|A_1|}{|A|}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{|2|} = \frac{2}{2} = 1$$

La matriz A_2 es como A pero cambiando la columna 2 por la columna B:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $y = \frac{|A_2|}{|A|}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|2|} = \frac{4}{2} = 2$$

La matriz A_3 es como A pero cambiando la columna 3 por la columna B:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos $z = \frac{|A_3|}{|A|}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{|2|} = \frac{6}{2} = 3$$

Donde el resultado del sistema de ecuaciones por Cramer es: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

2.1.Sistema de ecuaciones matriciales

Una ecuación matricial es una ecuación cuya incógnita es una matriz. Para poder resolver una ecuación matricial, tendremos que sumar, restar y multiplicar matrices y calcular matrices inversas.

Sistema de dimensión $2x2$: $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 5y = 10 \end{cases}$

No resolveremos la ecuación matricial resolviendo el sistema de ecuaciones lineales asociado (frecuentemente tendríamos 9 o más ecuaciones), sino multiplicando por las matrices inversas que aparecen en la ecuación, es decir:

a. Definimos las matrices A y B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Entonces, la ecuación matricial que tenemos es: $AX = B$

b. Calculamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 3 = 8 \neq 0$$

La matriz A es regular (la determinante es tiene que ser distinto de 0) y, por lo tanto, tiene matriz inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

c. Despejando la variable X en la ecuación matricial tenemos:

$$X = \frac{B}{A}$$

$$X = A^{-1}B$$

Por tanto, podemos resolver la ecuación calculando el producto de la matriz inversa de A por la matriz B:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Donde el resultado del sistema de ecuaciones por Matrices es: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$

Sin embargo, no siempre es todo tan fácil. Por ejemplo, si las matrices de la ecuación no son cuadradas, no podemos calcular su inversa.

Sistema de dimensión $3x3$: $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \\ 4x - 2y + z = 3 \end{cases}$

Definimos las matrices A y B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces, la ecuación matricial que tenemos es

$$AX = B$$

Calculamos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

La matriz A es regular (la determinante es tiene que ser distinto de 0) y, por lo tanto, tiene matriz inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejando la variable X en la ecuación matricial tenemos:

$$X = \frac{B}{A}$$

$$X = A^{-1}B$$

Por tanto, podemos resolver la ecuación calculando el producto de la matriz inversa de A por la matriz B:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Donde el resultado del sistema de ecuaciones por Matrices es: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

Ejercicios propuestos de sistemas de ecuaciones

Resolver las siguientes ecuaciones por el método de:

a) Determinante
b) Gauss Jordán
c) Menores y cofactores
d) Cramer
e) Matricial

1) $\begin{cases} x + 6y = 27 \\ 7x - 3y = 9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 5x + 8y = -60 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x - 4y = 41 \\ 11x + 6y = 47 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 9x + 11y = -14 \\ 6x - 5y = -34 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 10x - 3y = 36 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 11x - 9y = 2 \\ 13x - 15y = -2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 18x + 5y = -11 \\ 12x + 11y = 31 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x + 4y - 8z = -8 \\ 4x + 8y - z = 76 \\ 8x - y - 4z = 110 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3x - 3y - 3z = 18 \\ 3y - x - z = 12 \\ 7z - y - x = 24 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 8 \\ 3x + 4y + 2z = -1 \\ 2x - y + 5z = 3 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 5x - 3y - z = 1 \\ x + 4y - 6z = -1 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \\ 2x + 2y - z = -4 \end{cases}$

19) $\begin{cases} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$

20) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 6x - 2y - z = -14 \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$

ESPACIOS VECTORIALES

Introducción

En el álgebra línea es importante realizar el estudio de los espacios vectoriales por ser una estructura algebraica creada a partir de un conjunto de elementos llamados vectores que cumplen ciertas propiedades, los espacios vectoriales tienen aplicaciones en las ramas de la ciencia de la ingeniería por el tratamiento de objetos geométricos.

Los datos meteorológicos captados por sensores y transmitidos a una computadora, constituyen las entradas al sistema, esas entradas constituyen funciones. Estas funciones pueden sumarse y multiplicarse por escalar. Estas operaciones aplicadas a este tipo de funciones tienen una similitud a las operaciones de suma de vectores y producto por escalar en Rn. ¿Por qué esta explicación? Resulta que todas esas entradas o funciones que llegan al centro de mando, se denominan espacio vectorial.

En este capítulo se presentan los temas sobre espacios vectoriales en el siguiente orden: Subespacios vectoriales y propiedades; Generación de subespacios vectoriales; Bases en subespacios vectoriales; Dimensión, suma e intersección de subespacios vectoriales; Wronskiano.

Definición de espacios vectoriales

Sea un conjunto no vacío V y un campo $(k, +, .)$, donde "+" es una operación interna definida sobre el conjunto V y ".", una operación externa definida de k en V. Se dice que: $(V, k, +, .)$, es un espacio vectorial si y solamente si cumple con las siguientes propiedades:

I. Asociativa: $(\forall u, v, w \in V) \rightarrow \big((u + v) + w\big) = \big(u + (v + w)\big)$
II. Existencia de neutro aditivo: $(\exists e)(\forall v \in V) \rightarrow e + v = v + e = v$
III. Existencia de inverso aditivo: $(\forall v \in V)(\exists \hat{v}) \rightarrow \hat{v} + v = v + \hat{v} = e$
IV. Conmutativa: $(\forall u, v \in V) \rightarrow u + v = v + u$
V. Asociativa combinada: $(\forall \propto, \beta \in k)(\forall v \in V) \rightarrow \big((\propto . \beta) . v\big) = \big(\propto . (\beta . v)\big)$
VI. Existencia del neutro multiplicativo del campo k: $(\forall v \in V) \rightarrow 1 . v = v$, donde 1 es el neutro multiplicativo que pertenece al campo k
VII. Distributiva 1: $(\forall \propto \in k)(\forall v, w \in V) \rightarrow \big(\propto . (v + w)\big) = (\propto . v) + (\propto . w)$
VIII. Distributiva 2: $(\forall \propto, \beta \in k)(\forall v \in V) \rightarrow \big((\propto + \beta) . v\big) = (\propto . v) + (\beta . v)$

A los elementos del conjunto V, se los llaman vectores y a los elementos del campo k escalares, las operaciones del conjunto vectorial son

diferentes a pesar de que su notación es igual a las que se trabajan en las operaciones básicas, se puede omitir las operaciones y no el campo, es decir se puede decir que V es un espacio vectorial sobre el campo k.

Un espacio vectorial debe cumplir con las siete propiedades enunciadas y se debe demostrar las clausura del producto interno "+" y el producto externo "v", es decir:

$$(\forall v, w \in V) \rightarrow (u + v) \in V$$

$$(\forall \propto \in k)(\forall v \in V) \rightarrow \propto . v \in V$$

A continuación, se presentarán los principales espacios vectoriales con los que se trabajarán en este texto:

1) $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, .)$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,/ x, y \in \mathbb{R}\}$$

Si $(\lambda \in \mathbb{R})(u, v \in \mathbb{R}^2)$, por lo tanto $u = (x_1, x_2)$ y $v = (y_1, y_2)$, entonces:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\lambda u = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

2) $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\ /x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Si $(\lambda \in \mathbb{R})(u, v \in \mathbb{R}^3)$, por lo tanto $u = (x_1, x_2, x_3)$ y $v = (y_1, y_2, y_3)$, entonces:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\lambda u = \lambda\big(x_1, x_{2,}, x_3\big) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

3) $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, .)$

$$\mathbb{R}^n = \{(X_1, X_2, X_3, \dots\dots, X_n)\ /X_1, X_2, X_3, \dots\dots, X_n \in \mathbb{R}\}$$

Si $(\lambda \in \mathbb{R})(u, v \in \mathbb{R}^n)$, por lo tanto $u = (x_1, x_2, x_3, \dots\dots, x_n)$ y $v = (y_1, y_2, y_3, \dots\dots, y_n)$, entonces:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots\dots, x_n y_n)$$

$$\lambda u = \lambda\big(x_1, x_{2,}, x_3\big) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

4) El conjunto de matrices de dimensión nxm: $(M_{nxm}, \mathbb{R}, +, .)$, donde $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, con las operaciones: suma de matrices y producto de una matriz por un número real.

$$M_{nxm} = \left\{A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} ; a_{i,j} \in \mathbb{R}\right\}$$

5) El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales en la variable y con las operaciones clásicas suma de polinomios y producto de un escalar por un polinomio en la variable x:

$$(P_n[x], \mathbb{R}, +, .)$$

$$P(x) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \, ; n \in N; a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

6) El conjunto de todas las funciones reales: $(\mathcal{F}, \mathbb{R}, +, .)$, donde: $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, en el cual el operador "+" representa la suma de funciones reales y el "." El producto de un número real por una función.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\propto . f)(x) = \propto . f(x)$$

7) El conjunto de todas las sucesiones de números reales: $(\mathrm{S}, \mathbb{R}, +, .)$, donde:

$$S = \{(x_v)_{n=1}^{\infty};\ x_n \in \mathbb{R}, \mathrm{n} \geq 1\}$$

Con operaciones: "+" con la suma de sucesiones y "." Como el producto de la sucesión por un número real.

Se pueden demostrar que los espacios vectoriales mencionados cumplen con cada una de las propiedades del enunciado, es decir que cada uno de los conjuntos se definen dos operaciones para ser considerado espacio vectorial.

Subespacios vectoriales

Se llama subespacio vectorial de un espacio vectorial, a cualquier subconjunto no vacío con las mismas operaciones definidas sobre el espacio vectorial.

Definición: Sean: $(V, k, +, .)$, un espacio vectorial y $W \subseteq V$. Se dice que W es un subespacio vectorial de V, si y solamente si: $(W, k, +, .)$ es un espacio vectorial. Es decir que W es considerado subespacio vectorial del espacio vetorial V, si y solamente si: W es un espacio vectorial sobre el mismo campo k y con las mismas operaciones "+" y "−" que el espacio vectorial V.

Ejemplo: Demostrar que $W = \{(x, y, x) \,/\, y = x - 2z, \quad x, z \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial: $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$

Para demostrar que es un sub espacio vectorial, debe cumplir con cada uno de las propiedades de la definición de espacio vectorial:

a) Por demostrar: $(\forall u, v \in W) \rightarrow (u + v) \in W$ (Clausura).

Demostrar esta propiedad permite identificar si "+" es una operación interna sobre W, es decir:

$u = (x_1, y_1, z_1) \,/\, /y_1 = x_1 - 2z_1 \quad x_1, z_1 \in \mathbb{R}$ y

$v = (x_2, y_2, z_2) \,/\, /y_2 = x_2 - 2z_2 \quad x_2, z_2 \in \mathbb{R}$

$u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Y se cumple que: $(u + v) \in \mathbb{R}^3$

Para que $(u + v) \in W$, se debe demostrar: $y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) - 2(z_1 + z_2)$

$y_1 + y_2 = (x_1 - 2z_1) + (x_2 - 2z_2)$, porque $u, v \in W$

$(x_1 + x_2) - 2(z_1 + z_2)$, por la propiedad conmutativa y asociativa en los $\mathbb{R}$ y por lo tanto se demuestra que: $(u + v) \in W$ y también queda demostrado que: $(\forall u, v \in W) \rightarrow (u + v) \in W$

b) Por demostrar: $(\forall u, v, w \in V) \rightarrow \big((u + v) + w\big) = \big(u + (v + w)\big)$. (Asociativa).

En la demostración precedente se demostró que: $W \in \mathbb{R}^3$ y en la propiedad asociativa realiza la misma operación interna "+", por lo tanto también se cumple con la propiedad asociativa.

c) Por demostrar: $(\exists e \in W)(\forall v \in W) \rightarrow e + v = v + e = v$. (Existencia de neutro aditivo):

Sea $e = (0,0,0)$, que es el neutro aditivo de espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, y como: $y = x - 2z = 0 - (2 * 0) = 0$, por lo tanto $e \in W$, es decir el neutro aditivo de $\mathbb{R}^3$ pertenece a W. Además, tenemos que la operación "+" es la misma que ya se demostró se

concluye: $e + v = v + e = v$, con lo cual queda demostrado la existencia del neutro aditivo: $(\exists e \in W)(\forall v \in W) \rightarrow e + v = v + e = v$

d) Por demostrar la existencia del inverso aditivo, es decir: $(\forall v \in W)(\exists \hat{v}) \rightarrow \hat{v} + v = v + \hat{v} = e$

Sea: $v = (x, y, z)$ y $\hat{v} = (-x, -y, -z)$, donde $\hat{v}$ es el inverso aditivo de $\mathbb{R}^3$ y debemos demostrar que $\hat{v} \in \mathbb{R}^3$, por lo tanto:

$y = x - 2z \rightarrow -y = -(x - 2z)$, esto se da por que $v \in W$

e) $-y = -(x) - 2(-z)$, por lo tanto queda demostrado que $\hat{v} \in W$ y con la misma la operación "+", por lo tanto: $v = v + \hat{v} = e$ y así queda demostrado: $(\forall v \in W)(\exists \hat{v}) \rightarrow \hat{v} + v = v + \hat{v} = e$

f) Por demostrar la propiedad conmutativa: $(\forall u, v \in V) \rightarrow u + v = v + u$

Como $W \subseteq \mathbb{R}^3$, además es la misma operación "+" en $\mathbb{R}^3$, por lo que: $u + v = v + u$, por lo tanto queda demostrado: $(\forall u, v \in V) \rightarrow u + v = v + u$

g) Por demostrar $(\forall \beta \in \mathbb{R})(\forall v \in W) \rightarrow (\beta . v) \in W$

Si $\beta \in \mathbb{R}$ y $v = (x, y, z) \in W$, entonces:

$$\beta . W = \beta . (x, y, z) = (\beta x, \beta y, \beta z)$$

Ahora a demostrar que: $\beta y = \beta x - 2(\beta z)$

$\beta y = \beta(x - 2z)$, porque $v \in W$

$\beta y = \beta x - 2(\beta z)$, por lo tanto $\beta v \in W$ y queda demostrado que: $(\beta \in \mathbb{R})(\forall v \in W) \rightarrow (\beta . v) \in W$

h) Por demostrar la propiedad de la asociación mixta: $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall v \in W) \rightarrow \alpha.(\beta.v) = (\alpha.\beta).v \in W$

Como $W \subseteq \mathbb{R}^3$, además es la misma operación "." de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, entonces se cumple que: $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall v \in W) \rightarrow \alpha.(\beta.v) = (\alpha.\beta).v \in W$

i) Por demostrar la existencia del neutro multiplicativo del campo k: $(\forall v \in V) \rightarrow 1.v = v$

Como $W \subseteq \mathbb{R}^3$, además es la misma operación "." de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, entonces se cumple que: $(\forall v \in V) \rightarrow 1.v = v$

j) Por demostrar la propiedad distributiva 1: $(\forall \propto \in \mathbb{R})(\forall v, v \in W) \rightarrow \big(\propto.(u+v)\big) = (\propto.u) + (\propto.v)$

Como $W \subseteq \mathbb{R}^3$, además es la misma operación "." del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$, entonces se cumple que: $(\forall \propto \in \mathbb{R})(\forall v, v \in W) \rightarrow \big(\propto.(u+v)\big) = (\propto.u) + (\propto.v)$

k) Por demostrar la propiedad distributiva 2: $(\forall \propto, \beta \in \mathbb{R})(\forall v \in W) \rightarrow \big((\propto + \beta).v\big) = (\propto.v) + (\beta.v)$

Como $W \subseteq \mathbb{R}^3$, además es la misma operación "." del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$, entonces se cumple que: $(\forall \propto \in \mathbb{R})(\forall v, v \in W) \rightarrow \big(\propto.(u+v)\big) = (\propto.u) + (\propto.v)$

Teorema: Sea: $(V, k, +, .)$ Un espacio vectorial y $W \subseteq V$, se dice que W es un subespacio vectorial del espacio vectorial V, si y solamente si:

i) W, diferente de conjunto vacío, entonces: $W \neq \emptyset$
ii) Cumple la propiedad de clausura de la suma: $(\forall u, v \in W)\ /\ (u + v) \in W$
iii) Cumple la propiedad de clausura del producto: $(\forall \propto, \in k)(\forall v \in W)\ /\ \propto . v \in W$

Ejemplo: Determinar si el conjunto $W = \{(x, y, z)\ /\ x = y - z\}$, es un subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$

Por demostrar que: $\{(x, y, z \in \mathbb{R}^3)\ /\ x = y - z\}$, para esto se debe demostrar:

i) W, diferente de conjunto vacío: $W \neq \emptyset$
Demostrar que al menos el elemento pertenece al conjunto como: $0_v \in W$
$0_v = (0,0,0)$, entonces de $x = y - z \rightarrow 0 = 0 - 0$, por lo tanto $0_v \in W$ y concluimos que: $W \neq \emptyset$
ii) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall u, v \in W)\ /\ (\alpha u + v) \in W$
Sean $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$ elementos del conjunto w, entonces:

$$\alpha . u + v = \alpha(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$$
$$\alpha . u + v = (\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2, \alpha z_1 + z_2)$$

Como: $x_1 = y_1 - z_1$ y $x_2 = y_2 - z_2$, porque $u, v \in W$

$$\alpha x_1 + x_2 = \alpha(y_1 - z_1) + (y_2 - z_2)$$
$$\alpha x_1 + x_2 = (\alpha y_1 + y_2) - (\alpha z_1 + z_2)$$

Por lo tanto: $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall u, v \in W) \ / \ (\alpha u + v) \in W$

Y por lo demostrado en los literales i) y ii) se concluye que el conjunto W es un subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$

Ejemplo: Determinar si el conjunto $W = \{(x, y, z) \ / \ x > y + z\}$, es un subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$

Por demostrar que: $\{(x, y, z \in \mathbb{R}^3) \ / \ x > y + z\}$, para esto se debe demostrar:

I. W, diferente de conjunto vacío: $W \neq \emptyset$
   Demostrar que al menos el elemento pertenece al conjunto como: $0_v \in W$
   $0_v = (0,0,0)$, entonces de $x > y + z \rightarrow 0 = 0 + 0$, por lo tanto $0_v \notin W$ y concluimos que: W no es un subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$

PROPIEDADES DE LOS SUBESPACIOS VECTORIALES

Intersección de subespacios vectoriales

Teorema: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .))$, y si W_1y W_2 dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V, entonces la intersección de $W_1 \cap W_2$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial V.

i) Para su demostración se puede iniciar indicado que el $0_v \in W_1$y $0_v \in W_2$, por ser subespacios vectoriales de V, por lo tanto el $0_v \in W_1 \cap W_2$

ii) Además se debe demostrar que : $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall u, v \in W_1 \cap W_2)/$ $(\alpha u + v) \in W_1 \cap W_2$

Como: $u, v \in W_1 \cap W_2$, se puede indicar que $u, v \in W_1$ y $u, v \in W_2$, por lo tanto $\alpha u + v \in W_1$ y $\alpha u + v \in W_2$ por ser subespacios vectoriales lo que implica que $\alpha u + v \in W_1 \cap W_2$

Por las demostraciones de los literales i) y ii) se llega a la conclusión de que la intersección de dos subespacios vectoriales ($W_1 \cap W_2$) es un subespacio vectorial del espacio vectorial V. De conformidad a este teorema se puede concluir que siendo el espacio vectorial $(V, k, +, .))$, y si $W_1, W_2, W_3, \dots \dots, W_n$ son subespacios vectoriales del espacio vectorial V, entonces la intersección de $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap \dots \dots \dots \cap W_n$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial V

Ejemplo: Sean $W_1 = \{(x, y, z) \ / \ y + z = 0\}$ y $W_2 = \{(x, y, z) \ / \ x - y - z = 0\}$ dos subespacios vectoriales del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$. calcular el subespacio vectorial $W_1 \cap W_2$

$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \ / \ y + z = 0, \ \ x - \ y - z = 0 \}$$

$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \ / \ y = -z, \ \ x - \ y - z = 0 \}$$

$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \ / \ y = -z, \ \ x - (-z) - z = 0 \}$$

$$W_1 \cap W_2 = \{(0, -z, z) \ / \ z \in \mathbb{R} \}$$

De este ejemplo se puede demostrar que la unión de los subespacios vectoriales $(W_1 \cup W_2)$ no es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$.

i) $W_1 \cup W_2 \neq \emptyset$, está condición, si cumple por que $0_v \in W_1$y $0_v \in W_2$, por ser subespacios vectoriales de V, por lo tanto el $0_v \in W_1 \cup W_2$

ii) $(\forall u, v \in W_1 \cup W_2)/(u + v) \in W_1 \cup W_2$
Sea: $u = (1,2,-2) \in W_1$ (porque $y + z = 0$)y $v = (2,1,1) \in W_2$ (porque $x - \ y - z = 0$), por lo tanto $u + v = (1 + 2,2 + 1, -2 + 1) = (3,3,-1)$.}
$u + v \notin \ W_1$ (porque $y + z \neq 0$) y $u + v \notin \ W_2$ (porque $x - \ y - z \neq 0$), por lo tanto $u + v \notin \ W_1 \cup W_2$

Combinaciones lineales

Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$ Y los vectores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$, se llama combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ a forma: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in k$

Definición: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$ y los vectores $u, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$, se dice que el vector u una combinación lineal de

los vectores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ si existen escalares: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in k$ talque $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n$.

Ejemplo: Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$, determinar si el vector $u = (1, -3.1)$ es una combinación lineal de los vectores $v = (1,2,-1)$ y $w = (0,2,-1)$

Para su demostración se debe saber si existen los escalares que permitan expresar al vector como una combinación lineal: $u = \alpha : v + \beta . w$

$$(1, -3.1) = \alpha . (1,2,-1) + \beta . (0,2,-1)$$

$$(1, -3.1) = (\alpha, \alpha + 2\beta, -\alpha - \beta) \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + 2\beta = -3 \\ -\alpha - \beta = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + 2\beta = -3 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene que $\alpha = 1$ y con $\beta = -2$ satisfacen las otras dos ecuaciones, por lo tanto $u = (1, -3.1)$ es una combinación lineal de los vectores $v = (1,2,-1)$ y $w = (0,2,-1)$

Ejemplo: Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$, determinar para que valores de x, siendo el vector $u = (-1, -x. 1)$ es una combinación lineal de los vectores $v = (1,0,1)$ y $w = (1,2,-1)$

Para su demostración se debe saber si existen los escalares que permitan expresar al vector como una combinación lineal: $u = \alpha : v + \beta . w$

$$(-1, -x. 0) = \alpha. (1,0,1) + \beta. (1,2,-1)$$

$$(-1, -x, 1) =: (\alpha + \beta, 2\beta, \alpha - \beta) \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\beta = -x \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$$

Obtenemos un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas, para esto planteamos el sistema matricial:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -x \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)_{F_3 = F_3 - F_1} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -x \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right)_{F_3 = F_3 + F_2} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -x \\ 0 & 0 & -x \end{array}\right)$$

Es decir que para que el sistema tenga solución $x = 0$ para que el vector $(-1,0,1)$ sea una combinación lineal de los vectores $v = (1,0,1)$ y $w = (1,2,-1)$

Cápsula Lineal

Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$ y $S \subseteq V$, donde $S \neq \emptyset$, se define a la cápsula de S al conjunto formado por todos los elementos de V que se pueden expresar como una combinación lineal de los elementos del conjunto S, su notación es $\prec S \succ$

$$\prec S \succ = \{v \in V \ / \ v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots .. + \alpha_n v_n, \ \ \alpha_i \in k, \\ v_i \in S\}$$

Ejemplo: Si S= $\{(1.,-2),(-1,2),(5,1))\}$, calcular la cápsula $\prec S \succ$ del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, .)$

Para encontrar la solución, buscaremos tres combinaciones lineales de los vectores del conjunto S eligiendo números reales cualesquiera, es decir:

$$\prec S \succ = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (a,b,c) = \alpha(1,-2) + \beta(-1,2) + \gamma(5,1)\}$$

$$\prec S \succ = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (a,b) = (\alpha - \beta + 5\gamma, -2\alpha + 2\beta + \gamma)\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ -1 & 2 & b \\ 5 & 1 & c \end{array}\right)_{\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 - 5F_1}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & b + a \\ 0 & 6 & c - 5a \end{array}\right)$$

Para que el sistema de ecuaciones tenga solución $a + b = 0$, por lo tanto la cápsula estará formada por todos los elementos que cumplan con esta condición, y se la puede expresar como: $\prec S \succ = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a + b = 0\}$

Toda cápsula $\prec S \succ$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial al cual pertenece porque es diferente de vacío y cumple con la propiedad: $\alpha . u + v$ que pertenece a la cápsula $\prec S \succ$, donde: $\alpha \in k$ y $u, v \in \prec S \succ$

Generación de subespacios vectoriales

El conjunto formado por todas las combinaciones lineales de S, es un subespacio vectorial del espacio vectorial V y se llama subespacio engendrado y el conjunto S es un sistema generador de dicho subespacio vectorial.

Si consideramos los vectores en $\mathbb{R}^3$ y $S = \{u, v\}$; $u = (1, -1,2)$ y $v = (1,2,3)$, cualquier vector S, cumplirá la relación:

$$(x, y, z) = \alpha u + \beta v$$

$$(x, y, z) = \alpha(1, -1,2) + \beta(1,2,3)$$

$$(x, y, z) = (\alpha + \beta, -\alpha + 2\beta, 2\alpha + 3\beta)$$

Es decir: $\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = -\alpha + 2\beta \\ z = 2\alpha + 3\beta \end{cases}$, las cuales reciben el nombre de ecuaciones paramétricas del subespacio vectorial.

El subespacio vectorial generado por el conjunto S, es igual a la cápsula $\prec S \succ$, porque todo subespacio vectorial que contiene al conjunto S también contiene a la cápsula $\prec S \succ$, es decir que el conjunto S genera el subespacio vectorial W si $\prec S \succ = S$

Ejemplo: Probar si $p(x) = -2x^2 + x$, entonces $S = \left\{p(x), \frac{d}{dx}p(x), \frac{d^2}{dx^2}p(x)\right\}$ general el espacio vectorial $(p_2(x), \mathbb{R}, +, .)$

$$< S >= q(x) = ax^2 + bx + c \in p_2(x) \ / \ q(x)$$
$$= \alpha p(x) + \beta \frac{d}{dx}p(x) + \gamma \frac{d^2}{dx^2}p(x)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}p(x) = -4x + 1 \\ \frac{d^2}{dx^2}p(x) = -4 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = \alpha(-2x^2 + x) + \beta(-4x + 1) + \gamma(-4)$$

$$ax^2 + bx + c = -2\alpha x^2 + \alpha x - 4\beta x + \beta - 4\gamma$$

$$\begin{cases} x^2: \quad -2\alpha = a \\ x: \quad \alpha - 4\beta = b \\ indep: \quad \alpha - 4\gamma = c \end{cases}$$

Ahora se debe demostrar si existe solución con las ecuaciones obtenidas del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & a \\ 1 & -4 & 0 & b \\ 1 & 0 & -4 & c \end{array}\right)_{F_1=-\frac{1}{2}F_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{2} \\ 1 & -4 & 0 & b \\ 1 & 0 & -4 & c \end{array}\right)_{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{2} \\ 0 & -4 & 0 & b+\frac{a}{2} \\ 0 & 0 & -4 & c+\frac{a}{2} \end{array}\right)$$

Se obtuvo una matriz diagonal, por lo que se puede concluir que el sistema de ecuaciones siempre tendrá solución, por lo tanto $\prec S \succ = p_2(x)$ y el conjunto $S = \left\{p(x), \frac{d}{dx}p(x), \frac{d^2}{dx^2}p(x)\right\}$ genera al espacio vectorial $(p_2(x), \mathbb{R}, +, .)$

Definición: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$ y el conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots\dots, v_n\}$, donde $S \subseteq V$ y se dice **linealmente independiente**, si y sólo si la combinación lineal nula $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots \dots + \alpha_n v_n = 0$, tiene solución trivial con $\alpha_i \neq 0$, donde $i = 1,2,3, \dots\dots.., n$. Si la combinación lineal $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots \dots + \alpha_n v_n = 0$, tiene infinitas soluciones, al conjunto S se dice que es linealmente dependiente.

Un conjunto de vectores solo puede ser linealmente independiente o linealmente dependiente, pero no linealmente independiente y linealmente dependiente al mismo tiempo. Además, recordar que unos

sistemas de ecuaciones homogéneas producen una única solución, la trivial.

Ejemplo: Demostrar que el conjunto $S = \{(1,2,3), (-1,2,0), (0,2,1)\}$ subconjunto del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$ es linealmente independiente.

$$S = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (0,0,0)$$

$$S = \alpha(1,2,3) + \beta(-1,2,0) + \gamma(0,2,1) = (0,0,0)$$

$$S = (\alpha - \beta, 2\alpha + 2\beta + 2\gamma, 3\alpha + \gamma) = (0,0,0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2=F_2-2F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)_{F_2=\frac{1}{4}F_2}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)_{F_3=F_3-3F_2}$$

$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$, por lo tanto $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$, que es la solución única trivial por lo tanto el conjunto S es linealmente independiente.

Ejemplo: Sea el conjunto $S = \{(-2,2,x), (-1,1,0), (0,1,-x)\}$ subconjunto del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$, demostrar para qué

valores de x, el conjunto S es linealmente independiente o linealmente dependiente.

.

$$S = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (0,0,0)$$

$$S = \alpha(-2,2,x) + \beta(-1,1,0) + \gamma(0,1,-x) = (0,0,0)$$

$$S = (-2\alpha - \beta, 2\alpha + \beta + \gamma, x\alpha - x\gamma) = (0,0,0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & -x & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & 0 & -x \end{vmatrix} = 2x - x - 2x = -x = 0$$

Por lo tanto si $x = 0$, el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones por lo tanto el conjunto S es linealmente dependiente y para $x \neq 0$, el sistema tiene única solución la trivial por lo tanto el conjunto S es linealmente independiente.

Bases de espacios vectoriales

Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$ y $B \subseteq V$, se dice que B es una base del espacio vectorial V si y solo si B es linealmente independiente y si B genera al espacio al espacio vectorial $(V, k, +, .)$.

Ejemplo: Demostrar que $B = \{1 - x^3, x + x^2, 1 - 2x - x^3, 1 + x\}$ es una base del espacio vectorial $(p_3[x], \mathbb{R}, +, .)$

i) Demostrar que B genera al espacio vectorial $(p_3[x], \mathbb{R}, +, .)$

$$\prec B \succ = \{q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in p_3[x]/q(x) = \alpha(1 - x^3) + \beta(x + x^2) + \gamma(1 - 2x - x^3) + \delta(1 + x)\}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = \alpha - \alpha x^3 + \beta x + \beta x^2 + \gamma - 2\gamma x - \gamma x^3 + \delta + \delta x$$

$$\begin{cases} -\alpha - \gamma = a \\ \beta = b \\ \beta + 2\gamma + \delta = c \\ \alpha + \gamma + \delta = d \end{cases}$$

Ahora se debe determinar las condiciones para la cual el sistema tiene solución:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 2 & 1 & c \\ 1 & 0 & 1 & 1 & d \end{array}\right)_{\substack{F_1 = F_1 + F_4 \\ F_3 = F_3 - F_2}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & a + d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 2 & 1 & c - b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & d \end{array}\right)_{F_1 \leftrightarrow F_4} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 2 & 1 & c - b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a + d \end{array}\right)$$

Al obtener una matriz diagonal superior , queda demostrado que el sistema siempre tendrá solución por lo tanto B genera al espacio vectorial $(p_3[x], \mathbb{R}, +, .)$

ii) Demostrar que B es linealmente independiente

$$0x^3 + 0x^2 + ox + 0d$$
$$= \alpha - \alpha x^3 + \beta x + \beta x^2 + \gamma - 2\gamma x - \gamma x^3 + \delta$$
$$+ \delta x$$

$$\begin{cases} -\alpha - \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

Ahora se debe determinar si el sistema tiene única solución la trivial:

$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 2 & 1 & c \\ 1 & 0 & 1 & 1 & d \end{array}\right)$, de las operaciones de filas anteriores llegamos a: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$, entonces, $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$, por lo tanto B es linealmente independiente.

Como B genera al espacio vectorial y es linealmente independiente, por lo tanto B es una base del espacio vectorial $(p_3[x], \mathbb{R}, +, .)$

Ejemplo: Si $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2} / \begin{vmatrix} a & -3 \\ b & 1 \end{vmatrix} = 0 \right\}$ un subespacio vectorial del espacio vectorial del espacio vectorial $(M_{2x2}, \mathbb{R}, +, .)$, calcular una base para W

La idea en este ejemplo es encontrar un conjunto que genere al subespacio vectorial W:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2} / \begin{vmatrix} a & -3 \\ b & 1 \end{vmatrix} = 0 \right\} \Longrightarrow W$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2} \ / \ a + 3b = 0 \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2} / a = -3b \right\} \Longrightarrow W$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} -3b & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2} / b\,, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ b \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} / b\,, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \prec \left\{ \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \succ = \prec B \succ$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Por lo tanto B genera al subespacio vectorial W, ahora se demostrará si es linealmente independiente:

$$\alpha \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} -3\alpha & 1\alpha \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, lo que significa que: $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$, por lo tanto B es linealmente independiente y como genera al subespacio vectorial W, entonces B es una base de W

Dimensión de espacios vectoriales

Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$ Y el conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3, \dots \dots, v_n\}$ una base de V, se dice que m es la dimensión del espacio vectorial V, es decir la dimensión de un espacio vectorial está dado por el número de elementos que tiene la base del espacio vectorial y se nota como: $\dim(W)$. Si un subespacio vectorial posee una base con una cantidad finita de elementos, se dice el subespacio vectorial es de dimensión finita

Ejemplo: Sabiendo que $B = \left\{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ es una base del subespacio vectorial $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2} / \begin{vmatrix} a & -3 \\ b & 1 \end{vmatrix} = 0\right\}$. Determinar la dimensión del subespacio vectorial.

$$\dim(W) = 3$$

Si se tiene un espacio vectorial $(V, k, +, .)$ de dimensión m y cualquier subconjunto de V que contenga más de m elementos será linealmente dependiente, además ningún subconjunto de V que tenga un número menor de m elementos puede generar al espacio vectorial V

Teorema: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$, $B = \{v_1, v_2, v_3, \dots \dots, v_n\}$ un subconjunto de V y un vector $u \in V$. Si B es linealmente independiente y el vector u pertenece a la capsula, es decir $u \in \prec B \succ$, entonces $B \cup \{u\}$ es linealmente independiente.

Teorema: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$ y si W es un subespacio vectorial de dimensión m, entonces todo subconjunto linealmente independiente de W, es finito y es parte de una base de W.

Sea $(V, k, +, .)$ un espacio vectorial de dimensión finita y si W es un subespacio vectorial del espacio vectorial V, entonces el subespacio vectorial W es de dimensión finita y $dim(W) < dim(V)$

Sea $(V, k, +, .)$ un espacio vectorial de dimensión finita y si B es un subconjunto linealmente independiente del espacio vectorial V, entonces el conjunto B es parte de una base del espacio vectorial V.

Ejemplo: Sea el conjunto $B = \{(2, -1,0), (1,0,2)\}$ un subconjunto linealmente independiente del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$. Determinar una base B_1 para el espacio vectorial y que el conjunto B sea parte de la base B_1.

Como primer paso del desarrollo se debe calcular la base del conjunto B:

$$\prec B \succ = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (a, b, c) = \alpha(2, -1,0) + \beta(1,0,2)\}$$

$$\prec B \succ = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (a, b, c) = (2\alpha + \beta, -\alpha, 2\beta)\}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = x \\ -\alpha = y \\ 2\beta = z \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 2 & 0 & z \end{array}\right)$$

Ahora se va a verificar bajo qué condiciones el sistema tiene solución:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 2 & 0 & z \end{array}\right)_{F_3=F_3+2F_2} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 0 & 0 & z+2y \end{array}\right)$$

Por cuanto la última fila se hizo nula, se obtiene que $z + 2y = 0$ para que el sistema tenga solución, por lo tanto $z = -2y$

$$\prec B \succ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ z = -2y\}$$

Escogemos un vector que no pertenece a la cápsula $\prec B \succ$, como: $(0,1,1)$ que en unión al conjunto B forma el conjunto $B_1 = \{(2, -1,0), (1,0,2), (0,1,0)\}$ y que es linealmente independiente y se lo puede demostrar aunque no es necesario por el teorema enunciado.

$$B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (0,0,0) = \alpha(2, -1,0) + \beta(1,0,2) + \gamma(0,1,1)\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)_{F_1=F_1+2F_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_3=F_3-2F_1 \\ F_3=-F_3}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Y se obtiene: $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$ por lo tanto el sistema tiene única solución la trivial y B_1 es linealmente independiente y ahora falta demostrar que B_1 genera al espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$.

$$\prec B_1 \succ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (0,0,0) = \alpha(2, -1,0) + \beta(1,0,2) + \gamma(0,1,1)\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & x \\ -1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & 1 & z \end{array}\right)_{F_1=F_1+2F_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x+2y \\ -1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & 1 & z \end{array}\right)_{\substack{F_3=F_3-2F_1 \\ F_3=-F_3}}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x+2y \\ 1 & 0 & -1 & -y \\ 0 & 0 & -3 & z-2x-4z \end{array}\right)_{F_1 \leftrightarrow F_2}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -y \\ 0 & 1 & 2 & x+2y \\ 0 & 0 & -3 & z-2x-4z \end{array}\right)$$

Después de realizar en el sistema operaciones elementales entre filas se obtiene una matriz diagonal superior por lo que el sistema siempre tendrá solución, por lo tanto, B_1 genera al espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$.

Teorema: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$ de dimensión m, entoces cualquier subconjunto del espacio vectorial V que tenga m vectores linealmente independientes es una base del espacio vectorial V.

Ejemplo: Sea el conjunto $B = \{(1,1,1), (0,1,2), (1,2,1)\}$, identificar si B es una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$.

La dimensión del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$ Es 3 y es igual al número de elementos de conjunto B, por lo tanto solo basta demostrar que B es linealmente independiente.

$$\prec B \succ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (0,0,0) = \alpha(1,1,1) + \beta(0,1,2) + \gamma(1,2,1)\}$$

$$\prec B \succ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/(0,0,0) = (\alpha+\gamma, \alpha+\beta+2\gamma, \alpha+2\beta+\gamma)\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)_{F_3=F_3-2F_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Y se obtiene: $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$ por lo tanto el sistema tiene única solución la trivial y B es linealmente independiente y genera al espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$

Teorema: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$, $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots \dots, v_n\}$ un subconjunto de V. Si el conjunto S es linealmente independiente y el vector v_i es una combinación lineal de los otros elementos del conjunto S, entonces $\prec S \succ = \prec s \backslash \{v_i\} \succ$

Ejemplo: Sea el conjunto $S = \left\{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right\}$, calcular la $\prec S \succ$, dar una base y su dimensión.

$$S = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_1=F_1+4F_2 \\ F_3=F_3+3F_2}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -9 & 9 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_1=F_1+9F_4 \\ F_2=F_2+2F_4 \\ F_3=F_3+6F_4}}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

En el sistema después de las operaciones elementales entre filas se obtienen dos filas nulas por lo tanto el sistema no tiene solución y el conjunto S es linealmente dependiente. Esto también se puede verificar porque:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Eliminando el vector que es combinación de lineal de los otros vectores sin alterar la generación por lo que se tiene:

$$\prec S \succ, = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\prec S \succ, = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\prec S \succ, = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} / \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha + 5\beta & -\alpha + \beta \\ 3\alpha - 3\beta & -\beta \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora se debe de verificar bajo qué condiciones el sistema tiene solución:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & a \\ -1 & 1 & b \\ 3 & -3 & c \\ 0 & -1 & d \end{array}\right)_{\substack{F_1=F_1+4F_2 \\ F_3=F_3+3F_2}} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 9 & a+4b \\ -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & c+3b \\ 0 & -1 & d \end{array}\right)_{F_1=F_1+9F_4}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & a+4b+9d \\ -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & c+3b \\ 0 & -1 & d \end{array}\right)$$

Después de las operaciones elementales entre filas se obtuvieron dos filas nulas por lo tanto para que exista solución se debe cumplir: $a + 4b + 9d = 0$ y $c + 3b = 0$ y se obtiene la cápsula:

$$\prec S \succ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} / a + 4b + 9d = 0, c + 3b = 0 \right\}$$

Pera que el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, sea una base de la capsula $\prec S \succ$, se debe de probar que es linealmente independiente, y se procede así:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / = \alpha \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_1=F_1+4F_2 \\ F_3=F_3+3F_2}} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 9 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)_{=F_1+9F_4} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2=-F_2 \\ F_4=-F_4}}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, y queda demostrado que el conjunto $\left\{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ es linealmente independiente y además es una base de la cápsula $\prec S \succ$, con $dim(\prec S \succ) = 2$.

Teorema: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$ De dimensión m, entonces cualquier subconjunto del espacio vectorial que tengan m vectores que generan el espacio vectorial es una base del espacio del espacio vectorial V.

Ejemplo: Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2z + x = 0\}$ un subespacio vectorial de dimensión 2 del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$. Calcular una base para el subespacio vectorial.

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2z + x = 0\} \Rightarrow W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -2z = x\}$$

$$W = \{(-2z, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(-2z, 0, z) + (0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{z\,(-2,0,1) + y(0,1,0) \in \mathbb{R}^3 / y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(-2,0,1), (0,1,0)\} =\prec B \succ= B$$

Por lo tanto B genera al subespacio vectorial W y como la $\dim(W) = 2$, entonces B es una base del subespacio vectorial W.

Wronskiano

El Wronskiano es un determinante empleado para determinar independencia o dependencia lineal de un conjunto de funciones diferenciables.

Definición: Sean $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\dots\dots, f_n(x)$, n funciones $n-1$ diferenciables, entonces el Wronskiano es :

$$w(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & \dots & f_n(x) \\ \frac{d}{dx} f_1(x) & \frac{d}{dx} f_2(x) & \frac{d}{dx} f_3(x) & \dots & \frac{d}{dx} f_n(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} f_1(x) & \frac{d^2}{dx^2} f_2(x) & \frac{d^2}{dx^2} f_3(x) & \dots & \frac{d^2}{dx^2} f_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f_1(x) & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f_2(x) & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f_3(x) & \dots & \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f_n(x) \end{vmatrix}$$

Teorema: Sea el espacio vectorial $(\mathcal{F}(x), \mathbb{R}, +, .)$ y el conjunto $S = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\dots\dots, f_n(x)\} \subseteq \mathcal{F}(x)$, si $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\dots\dots, f_n(x)$son diferenciables en $n-1$ ocasiones,

entonces S es linealmente independiente si existe al menos un x que pertenecen al dominio de las funciones tal que $w(x) \neq 0$.

Ejemplo: Sea el espacio vectorial $(\mathcal{F}(x), \mathbb{R}, +, .)$ y el conjunto $S = \{x, x^2, x^3\} \subseteq \mathcal{F}(x)$, determinar si S es linealmente independiente.

$$w(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (12x^3 + 2x^3) - (6x^3 + 6x^3) = 2x^3 \neq 0$$

Por lo tanto, el conjunto S es linealmente independiente para todo $x \neq 0$

Ejemplo: Sea el espacio vectorial $(\mathcal{F}(x), \mathbb{R}, +, .)$ y el conjunto $S = \{\cos(x), \sin(x)\} \subseteq \mathcal{F}(x)$, determinar si S es linealmente independiente.

$$w(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = cos^2(x) + sin^2(x) = 1$$

Por lo tanto, el conjunto S es linealmente independiente para todo $x \in \mathbb{R}$

Suma e intersección de subespacios vectoriales

Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$. Si W_1 y W_2 son dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V, entonces: $W_1 + W_2 = \{v \in V / v = w_1 + w_2,\ w_1 \in W_1 + w_2 \in W_2\}$, es decir la suma de $W_1 + W_2$ es igual a todo el conjunto de elementos del espacio vectorial V que se

puede expresar como la suma de un elemento del subespacio vectorial W_1 más otro elemento del subespacio vectorial W_2.

Teorema: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$. Si W_1 y W_2 son dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V, entonces: $W_1 + W_2$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial V.

Teorema: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$ y W_1 y W_2 son dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V. Si B_1 y B_2 son bases de los subespacios vectoriales W_1 y W_2, entonces $W_1 + W_2 =\prec B_1 \cup B_2 \succ$.

Teorema de la dimensión: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$ y W_1 y W_2 son dos subespacios vectoriales de dimensión finita del espacio vectorial V, entonces se tiene que: $dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$.

Definición: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$. Si W_1 y W_2 son dos subespacios vectoriales del espacio vectorial V, se define a la suma directa como: $W_1 \oplus W_2 = \{v \in V / \exists!\, u \epsilon W_1, \exists!\, w \epsilon W_2, v = u + w\}$

Definición: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$. Si U,W_1 y W_2 son subespacios vectoriales del espacio vectorial V.Se dice que U es la suma directa de W_1 y W_2, si y solo si $U = W_1 \oplus W_2$.

Teorema: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$. Si U,W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de dimensión finita del espacio vectorial V, se dice que $U = W_1 \oplus W_2$, si y solo si: $U = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = (0_v)$.

Corolario: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$. Si U,W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de dimensión finita del espacio vectorial V, entonces: $dim(W_1 \oplus W_2) = dim(W_1) + dim(W_2)$.

Teorema: Sea el espacio vectorial $(V, k, +, .)$ De dimensión finita n. Si U es un subespacio vectorial del espacio vectorial V, entonces existe un subespacio vectorial W del espacio vectorial V, tal que $V = U \oplus W$.

Ejemplo: Sea: $W_1 = \{(x, y, z)/y = 0\}$ y $W_2 = \{(x, y, z)/x + z = 0\}$, dos subespacios vectoriales del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$, encontrar: $W_1 \cap W_2$.

Los elementos de $W_1 \cap W_2$ pertenecen tanto a W_1 como W_2, por lo tanto sus ecuaciones implícitas son la unión de sus subespacios vectoriales, quedando de la forma:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = -\alpha \end{cases} ; \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Dando como resultado la base: $B_{W_1 \cap W_2} = \{(1,0,-1)\}$. Un conjunto generador de $W_1 + W_2$ es la unión de las bases W_1 y W_2, entonces: $B_1 = \{(1,0,0), (0,0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,0,-1), (0,1,0)\}$, por lo tanto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_3=F_3+F_2 \\ F_3=F_3-F_1}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow B_{W_1+W_2}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo: Sea $U = \{ax^2 + bx + c \in P_2[x] / a + 2c - b = 0\}$ un subespacio vectorial del espacio vectorial $(P_2[x], \mathbb{R}, +, .)$. Hallar un subespacio vectorial W que cumpla: $P_2[x] = U + W$.

Como primer paso, se debe encontrar una base para el subespacio vectorial U:

$$U = \{ax^2 + bx + c \in P_2[x] / a = b - 2c =\}$$

$$U = \{(b - 2c)x^2 + bx + c \in P_2[x] / b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$U = \{bx^2 - 2cx^2 + bx + c \in P_2[x] / b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$U = \{(bx^2 + bx) + (-2cx^2 + c) \in P_2[x] / b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$U = \{b\,(x^2 + x) + c(-2x^2 + 1) \in P_2[x] / b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$U =\prec B \succ \Rightarrow B = \{x^2 + x, -2x^2 + 1\}$$

También se debe demostrar que el conjunto B es linealmente independiente, para esto:

$$\alpha(x^2+x)+\beta(-2x^2+1)=0x^2+0x+0$$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$; por lo tanto el conjunto B es linealmente independiente y por lo tanto es base del subespacio vectorial U. Ahora se debe completar una base para el espacio vectorial $P_2[x]$

$$B_1 = \{x^2+x, -2x^2+1, x\}$$

Y demostrar que B_1 es linealmente independiente, condición suficiente para indicar que B_1 es base para el espacio vectorial $P_2[x]$

$$\alpha(x^2+x)+\beta(-2x^2+1)+\gamma(x)=0x^2+0x+0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)_{F_2=F_2-F_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)_{F_2\leftrightarrow F_3}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)_{F_3=F_3-2F_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto B_1 es base para el espacio vectorial $P_2[x]$, porque tiene tres vectores linealmente independiente en un espacio vectorial de dimensión 3. Además,

$$W = \prec \{(x)\} \succ = \{ax \in P_2[x] / a \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo: Sea $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y\}$ y $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0\,, y - z = 0\}$, dos subespacios vectoriales del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$. Calcular: $W_1 + W_2$ y $W_1 \oplus W_2$.

Como primer paso encontraremos las bases de los subespacios vectoriales W_1 y W_2

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y\} \Rightarrow W_1 = \{(2y, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(2y, y, 0) + (0,0, z) \in \mathbb{R}^3 / y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y\,(2,1,0) + z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 / y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$W_1 = \prec \{(2,1,0), (0,0,1)\} \succ = \prec B_1 \succ$$

Por lo tanto $B_1 = \{(2,1,0), (0,0,1)\}$ y genera al subespacio vectorial W_1.

Ahora probaremos que los vectores de B_1 son linealmente independiente:

$$\alpha(2,1,0) + \beta(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto B_1 es linealmente independiente y es una base del subespacio vectorial W_1

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 0\,, y - z = 0\} \Rightarrow W_2$$
$$= \{(y, y, y) \in \mathbb{R}^3 / y \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 = \{y\,(1,1,1) \in \mathbb{R}^3 / y \in \mathbb{R}\}$$

$$W_2 =\prec \{(1,1,1)\} \succ =\prec B_2 \succ$$

Por lo tanto $B_2 = \{(1,1,1)\}$ y genera al subespacio vectorial W_2.

Como B_2 tiene un solo elemento no nulo, por lo tanto B_2 es linealmente independiente y es una base del subespacio vectorial W_2

Del teorema anterior se conoce que $W_1 + W_2 =\prec B_1 \cup B_2 \succ$

$$W_1 + W_2 =\prec B_1 \cup B_2 \succ =\prec \{(2,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\} \succ$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (y, y, y) = \alpha(2,1,0) + \beta(0,0,1) + \gamma(1,1,1)\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (y, y, y) = (2\alpha + \gamma, \alpha + \gamma, \beta + \gamma)\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)_{F_1 = F_1 - 2F_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)_{\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto el sistema siempre tiene solución y se puede decir que $W_1 + W_2 \in \mathbb{R}^3$

De lo demostrado tenemos que: $dim(W_1) = 2$, $dim(W_2) = 1$ y $dim(W_1 + W_2) = 3$. Además del teorema de la dimensión tenemos: $dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$.

$$dim(W_1 \cap W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 + W_2) = 3 + 1 - 3$$
$$= 0$$

Como $dim(W_1 \cap W_2) = 0$, y el único subespacio vectorial de dimensión cero es el subespacio vectorial nulo, por lo tanto: $W_1 + W_2 \in \mathbb{R}^3$

Ejercicios propuestos de espacios vectoriales

1. Sea $w = (1,3,5,1)$, determine si $w\epsilon \prec \{(1,1,0,1), (1,2,3,0), (0,2,2,0)\} \succ$
2. ¨Probar si los vectores del conjunto $S = \{(1,2,3), (0,5,2), (-2,-3,-4)\}$ son linealmente dependiente.
3. Sea el conjunto $S = \{(1,1,1,0), (0,-2,2,0), (-3,-3,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$ demostrar si es una base del espacio vectorial $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, +, .)$
4. Sea $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0, y = 1\}$ y $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z = 0\}$, dos subespacios vectoriales del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$. Calcular: $W_1 + W_2$ y $W_1 \oplus W_2$.
5. Sea $U = \{x^2, 1 + x, 1 - x^2 \in P_2[x]\}$. Demuestre si U es una base del espacio vectorial $(P_2[x], \mathbb{R}, +, .)$

6. Sea $U = \{ax^3 + ab + cx + d \in P_2[x]/a - b + c = 0, a - d = 0\}$ un subespacio vectorial del espacio vectorial $(P_3[x], \mathbb{R}, +, .)$. Hallar un subespacio vectorial W que cumpla: $P_2[x] = U + W$.
7. Sea: $W_1 = \{(x, y, z)/y + z = 0\}$ y $W_2 = \{(x, y, z)/x = 1\}$, dos subespacios vectoriales del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, .)$, encontrar: $W_1 \cap W_2$.
8. Considere el espacio vectorial $(\mathcal{F}(x), \mathbb{R}, +, .)$ y el conjunto $S = \{x, x^2, 4x - 3x^2\} \subseteq \mathcal{F}(x)$, determinar si S es linealmente independiente.
9. Considere el espacio vectorial $(\mathcal{F}(x), \mathbb{R}, +, .)$ y el conjunto $S = \{e^{4x}, e^{-4x}\} \subseteq \mathcal{F}(x)$, determinar si S es linealmente independiente.
10. Considere el espacio vectorial $(\mathcal{F}(x), \mathbb{R}, +, .)$ y el conjunto $S = \{2x^2, -3x^2\} \subseteq \mathcal{F}(x)$, determinar si S es linealmente independiente.
11. Considere el espacio vectorial $(\mathcal{F}(x), \mathbb{R}, +, .)$ y el conjunto $S = \{1, \cos(x)\} \subseteq \mathcal{F}(x)$, determinar si S es linealmente independiente.
12. Considere el espacio vectorial $(\mathcal{F}(x), \mathbb{R}, +, .)$ y el conjunto $S = \{x^3, -x^3\} \subseteq \mathcal{F}(x)$, determinar si S es linealmente independiente.
13. Considere el espacio vectorial $(\mathcal{F}(x), \mathbb{R}, +, .)$ y el conjunto $S = \{e^x, \cos(x), \sin(x)\} \subseteq \mathcal{F}(x)$, determinar si S es linealmente independiente.

14. Considere el espacio vectorial $(\mathcal{F}(x), \mathbb{R}, +, .)$ y el conjunto $S = \{2x^2 + 3, x^2, 1\} \subseteq \mathcal{F}(x)$, determinar si S es linealmente independiente.
15. Considere el espacio vectorial $(\mathcal{F}(x), \mathbb{R}, +, .)$ y el conjunto $S = \{x^2, 5x, 2x^2\} \subseteq \mathcal{F}(x)$, determinar si S es linealmente independiente.

PRODUCTO INTERNO

Introducción

En este capítulo se realizará la definición de producto interno con el análisis de varias de sus propiedades que incluyen el principio de ortogonalidad, y demostrar una norma a partir del producto interno, también se analizarán las nociones geométricas de distancia y perpendicularidad en espacios vectoriales, con el conocimiento adquiridos en el capítulo 3, dedicado a los espacios y sub espacios vectoriales.

En el área de las matemáticas el producto escalar es la operación conocida como producto interno o producto punto, el producto interno sobre un espacio vectorial es una operación que asigna a cada par de vectores que pertenecen al espacio vectorial un número real, para su estudio se realizará uun aserie de ejemplos resueltos empleando las propiedades con uso de lenguaje general de vectores.

Definición de producto interno

Un producto interno o escalar definido sobre V es una aplicación entre el conjunto de todos los pares de vectores (u, v) y R, cuyo resultado es un número real denotado por (u, v), que satisface las siguientes propiedades para todo $u, v, w \in V$ y todo escalar $\alpha \in R$:

1) $(u, v) = (v, u)$

2) $\alpha(u,v) = (\alpha u), v = u, (\alpha v)$
3) $(u+v,w) = (u,w) + (v,w)$
4) $(u,u) \geq 0\ y\ (u,u) = \Leftrightarrow u = 0$

Ejemplo: El producto escalar usual en R^2 es un Producto Interno.

Sean $u = (u_1, u_2)^t, v = (v_1, v_2)^t, w = (w_1, w_2)^t \in R^2\ y\ sea\ \alpha \in R$.

Solución:

1) $(u,v) = u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2 = (v,u)$
2) $\alpha(u,v) = \alpha(u_1v_1 + u_2v_2) = (\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 = (\alpha v, v)$ y análogamente para la otra igualdad $\alpha(u,v) = (v, \alpha u)$
3) $(u+v,w) = (u_1+v_1)w_1 + (u_2+v_2)w_2 = u_1w_1 + v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 = (u_1w_1 + u_2w_2) + (v_1w_1 + v_2w_2) = (u,w) + (v,w)$.
4) $(u,u) = u_1^2 + u_2^2 \geq 0$ y $(u,u) = 0 \Leftrightarrow u_1^2 + u_2^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$\therefore$ es un producto interno.

Ejemplo: Un espacio vectorial en P_1 sobre R y definir en la operación para vectores arbitrarios $p(x) = a_0 + a_1x$ y $q(x) = b_0 + b_1x$ dada por:

$$(p,q) = a_0b_0 + 2a_1b_1$$

Solución: Veamos que es un producto interno: para todo $p(x) = a_0 + a_1x, q(x) = b_0 + b_1x, t(x) = c_0 + c_1x \in P_1$ y todo $\alpha \in R$ se cumple que:

1) $(p,q) = a_0b_0 + 2a_1b_1 = b_0a_0 + 2b_1a_1 = (q,p)$
2) $(\alpha p,q) = \alpha(a_0b_0 + 2a_1b_1) = (\alpha a_0)b_0 + 2(\alpha a_1)b_1 = (\alpha p,q)$ y análogamente para la otra igualdad $\alpha(p,q) = (p,\alpha q)$
3) $(p+q,t) = (a_0+b_0)c_0 + 2(a_1+b_1)c_1 = a_0c_0 + b_0c_0 + 2a_1c_1 + 2b_1c_1 = (a_0c_0 + 2a_1c_1) + (b_0c_0 + 2b_1c_1) = (p,t) + (q,t)$
4) $(p,p) = a_0^2 + 2a_1^2 \geq 0$ y $(p,q) = 0 \Leftrightarrow a_0^2 + 2a_1^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$

$\therefore$ es un producto interno.

Como se analizó en el caso de R^2 en general R^n, tenemos la posibilidad de definir, a partir del producto escalar, conceptos geométricos tales como la longitud de un vector, la distancia y el ángulo entre vectores de dicho espacio. Las nociones pueden ser generalizadas a cualquier espacio vectorial con producto interno fácilmente.

Norma de un vector

La longitud o Norma $\|u\|$ de un vector $u \in V$ como el número real:

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}$$

Ejemplo: En el espacio vectorial P_1 sobre R con el producto interno

$$(a_0 + a_1x, b_0 + b_1x) = a_0b_0 + 2a_1b_1$$

Calcular la norma del polinomio $p(x) = 4 - 5x \in P_1$

$$\|u\| = \sqrt{(p,p)} = \sqrt{(4-5x, 4-5x)} = \sqrt{((4)(4)+2(-5)(-5)} = \sqrt{66}$$

Definición: La longitud o Norma $\|v\|$ de un vector $v \in V$ como el número real:

$$\|v\| = \sqrt{(v * v)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Si $u = (u_1, u_2) \in R^2$

$$\|u\| = \sqrt{(u * u)} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Si $v = (v_1, v_2, v_3) \in R^3$

$$\|v\| = \sqrt{(v * v * v)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Observamos que $v * v = \|v\|$ y la distancia de A a B es $d(A,B) = \|B - A\|$

Proposición de una norma: Toda norma definida en V a partir de un Producto Interno tiene las siguientes propiedades: para todo $u, v \in V$ y todo $\alpha \in K$, se cumple que:

1) $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (Positividad)
2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\| \therefore u \in V$ (Homogeneidad)

3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Desigualdad Triangular)

Ejemplo: Calcular la Norma y la distancia del siguiente ejercicio: $w = (1,0,\sqrt{2})$

$$La\ distancia\ A = (1,-3,2)\ y\ B = (x,y,z)$$

Solución:

$$\|w\| = \sqrt{(w * w)} = \sqrt{1^2 + 0^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

$$\|B - A\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2}$$

Ejemplo: Sea $P = (4,2,1), Q = (6,2,1)\ y\ R = (5,2+\sqrt{3},1)$. Deseamos demostrar que el triangulo PQR es equilátero. Por demostrar que $\|PQ\| = \|QR\| = \|RP\|$

Solución:

$$\|PQ\| = \|Q - P\| = \sqrt{(6-4)^2 + (2-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\|QR\| = \|R - Q\| = \sqrt{(5-6)^2 + \left(2+\sqrt{3}-2\right)^2 + (1-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\|RP\| = \|P - R\| = \sqrt{(4-5)^2 + \left(2 - 2 + \sqrt{3}\right)^2 + (1-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Ejemplo: Sea $P = (2, y-2, -1), Q = (1,2,-1)$. Hallar los valores de y tal que $\|PQ\| = \sqrt{2}$

Solución:

$$\|PQ\| = \|Q - P\| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-(y-2))^2 + (-1-(-1)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (4-y)^2} = \sqrt{1 + 16 - 8y + y^2}$$

$$= \sqrt{y^2 - 8y + 17}$$

$$\|PQ\| = \sqrt{y^2 - 8y + 17} = \sqrt{2}$$

$$\|PQ\| = \left(\sqrt{y^2 - 8y + 17}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = y^2 - 8y + 17 = 2$$

$$\|PQ\| = y^2 - 8y + 17 - 2 = 0$$

$$\|PQ\| = y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$\|PQ\| = (y-5)(y-3) = 0$$

$$(y-5) = 0 \qquad (y-3) = 0$$

$$y = 5 \qquad y = 3$$

Ejemplo: Determinar el o los vectores de r que cumplan las siguientes condiciones:

a) $\|r + (1, -2,0)\| = \sqrt{5}$
b) $r = s(0, -3,1)$

Solución:

$$\|r + (1, -2,0)\| = \sqrt{5} \implies \|(a + 1, b - 2, c)\| = \sqrt{5}$$

$$\implies \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 2)^2 + c^2} = \sqrt{5}$$

$$\implies \left(\sqrt{(a + 1)^2 + (b - 2)^2 + c^2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$\implies (a + 1)^2 + (b - 2)^2 + c^2 = 5$$

Luego,

$$(a, b, c) = s(0, -3,1) = a = 0, b = -3s, c = s$$

Sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$(a + 1)^2 + (b - 2)^2 + c^2 = 5 \implies (0 + 1)^2 + (-3s - 2)^2 + s^2 = 5$$

$$\implies 1 + 9s^2 + 12s + 4 + s^2 = 5$$

$$\implies 1 + 9s^2 + 12s + 4 + s^2 - 5 = 0$$

$$\Longrightarrow 10s^2 + 12s = 0$$

Resolvemos las ecuaciones cuadráticas y las soluciones son $s = 0\ y\ s = -\frac{6}{5}$

Los vectores que cumplen las condiciones son:

$$r = \left(0, \frac{18}{5}, -\frac{6}{5}\right)$$

Ejemplo: Sea u el vector que satisface las condiciones siguientes:

a) u es una combinación lineal de los vectores $(1, -1,2)\ y\ (-4,0,-1)$
b) $u(-1,1,2) = 0$
c) $\|u\| = \sqrt{35}$

Solución:

$$u = t(1, -1,2) + s(-4,0,-1)$$

$$\Longrightarrow u = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} x = t - 4s \\ y = -t \\ z = 2t - s \end{cases}$$

Si $u(-1,1,2) = 0$, entonces $-x + y + 2z = 0$. En el sistema de ecuaciones las variables x, y, z dependen de t y s.

$$-x + y + 2z = 0 \Longrightarrow -(t - 4s) + (-t) + 2(2t - s) = 0$$

$$\Longrightarrow -t + 4s - t + 4t - 2s = 0$$

$$\Longrightarrow 2t + 2s = 0$$

Despejando t:

$$\Longrightarrow 2t + 2s = 0$$

$$\Longrightarrow 2t = -2s$$

$$\Longrightarrow t = -s$$

Si $\|u\| = \sqrt{35} \Longrightarrow$ que $\|u\| = \|x, y, z\| = \sqrt{35} = (\|x, y, z\|)^2 = (\sqrt{35})^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 35$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 35 \Longrightarrow (t - 4s)^2 + (-t)^2 + (2t - s)^2 = 35$$

Reemplazando t

$$\Longrightarrow (-s - 4s)^2 + (s)^2 + (-2s - s)^2 = 35$$

$$\Longrightarrow (-5s)^2 + (s)^2 + (-3s)^2 = 35$$

$$\Longrightarrow 25s^2 + s^2 + 9s^2 = 35$$

$$\Longrightarrow 35s^2 = 35$$

Despejando s:

$$\Longrightarrow 35s^2 = 35$$

$$\Longrightarrow s = \pm 1$$

Tenemos que $s = 1$ y $t = -1$, entonces el vector $u = (-5,1,-3)$.

Y si tomamos $s = -1$ y $t = 1$, entonces el vector $u = (5,-1,3)$, ambos vectores satisfacen las condiciones del problema.

4.1. Desigualdad de Cauchy – Schwarz

Dado el espacio vectorial V dado en el producto interno, para $u, v \in V$ se tiene:

$$|(u,v)| \leq \|u\|\|v\|$$

Demostración:

$$\|u + \lambda v\|^2 = (u + \lambda v, u + \lambda v) = \|u\|^2 + \lambda^2\|v\|^2 + 2\lambda(u,v) \geq 0$$

Además, considerando la expresión $p(\lambda) = \|u\|^2 + \lambda^2\|v\|^2 + 2\lambda(u,v)$ y la ecuación $p(\lambda) = 0$, entonces se tendrá $\Delta \leq 0$, es decir,

$$\Delta = 4[(u,v)]^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0 \;\Rightarrow [(u,v)]^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

Teorema: desigualdad de Cauchy – Schwarz en R^n

Sean u y v dos vectores en R^n. Entonces:

1) $|uv| \leq |u||v|$
2) $|uv| = |u||v| \Leftrightarrow u = 0$ o $v = \lambda u$ para algún número real λ

Demostración:

1) Sí $u = 0$ o $v = 0$ (o ambos) entonces se cumple que ambos lados son iguales a 0.

Si se supone que $u \neq 0$ y $v \neq 0$, entonces

$$0 \leq \left|\frac{u}{|u|} - \frac{v}{|v|}\right|^2 = \left(\frac{u}{|u|} - \frac{v}{|v|}\right)\left(\frac{u}{|u|} - \frac{v}{|v|}\right) = \frac{uu}{|u|^2} - \frac{2uv}{|u||v|} + \frac{vv}{|v|^2}$$
$$= \frac{|u|^2}{|u|^2} - \frac{2uv}{|u||v|} + \frac{|v|^2}{|v|^2} = 2 - \frac{2uv}{|u||v|}$$

Así, $\frac{2uv}{|u||v|} \leq 2$, de manera que $\frac{uv}{|u||v|} \leq 1$ y $uv \leq |u||v|$.

En forma similar con $0 \leq \left|\frac{u}{|u|} - \frac{v}{|v|}\right|^2$, se llega a $\frac{uv}{|u||v|} \geq -1$, o sea, $uv \geq -|u||v|$.

Con estas dos desigualdades se obtiene que:

$$-|u||v| \leq uv \leq |u||v| \text{ o } |uv| \leq |u||v|$$

2) Si $u = \lambda v$, entonces $|uv| = |\lambda vv| = |\lambda||v|^2$ y $|u||v| = |\lambda v||v| = |\lambda||v||v| = |\lambda||v|^2 = |uv|$.

Inversamente, suponga que $|uv| = |u||v|$ con $u \neq 0$ y $v \neq 0$.

Entonces.

$$\left|\frac{u}{|u|}\frac{v}{|v|}\right| = 1, de\ manera\ que\ \frac{u}{|u|}\frac{v}{|v|} = \pm 1$$

Caso 1.

$$\frac{u}{|u|}\frac{v}{|v|} = 1$$

$$\left|\frac{u}{|u|} - \frac{v}{|v|}\right|^2 = \left(\frac{u}{|u|} - \frac{v}{|v|}\right)\left(\frac{u}{|u|} - \frac{v}{|v|}\right) = 2 - \frac{2uv}{|u||v|} = 2 - 2 = 0$$

Así,

$$\frac{u}{|u|} = \frac{v}{|v|}\ o\ u = \frac{u}{|u|}v = \lambda v$$

Caso 2.

$$\frac{u}{|u|}\frac{v}{|v|} = -1$$

$$\left|\frac{u}{|u|}-\frac{v}{|v|}\right|^2=\left(\frac{u}{|u|}-\frac{v}{|v|}\right)\left(\frac{u}{|u|}-\frac{v}{|v|}\right)=2+\frac{2uv}{|u||v|}=2-2=0$$

Así,

$$\frac{u}{|u|}=\frac{v}{|v|}\ o\ u=-\frac{u}{|u|}v=\lambda v$$

Ejercicios propuestos aplicando desigualdad de Cauchy – Schwarz

1. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Demuestre que $|uv|=\|u\|\|v\|$ es desigualdad de Cauchy – Schwarz
2. La desigualdad de Cauchy – Schwarz establece que para cualquier número real a_1, a_2, b_1, b_2

$$\left\|\sum_{i=1}^{2} a_i b_j\right\| \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2} a_i\right)}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{2} b_j\right)}$$

   Utilice el producto escalar para probar esta fórmula.

3. Usando la desigualdad de Cauchy – Schwarz, pruebe la desigualdad del triángulo:

$$|u+v| \leq |u|+|v|$$

   Obtenga la expansión de $|u+v|^2$

4. En el espacio vectorial P_1 sobre R con el producto interno

$$(a_0+a_1x, b_0+b_1x)=a_0b_0+2a_1b_1$$

Calcular la distancia entre los polinomios $p_1(x) = 1\ y\ p_2(x) = 1 + 2x$.

Como $p_1(x) - p_2(x) = -2x$

Vectores ortogonales

Los vectores u y v diferentes de cero son ortogonales o perpendiculares si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

Ejemplo: Demuestre que los vectores $u = 3i + 4j$ y $v = -4i + 3j$ son ortogonales.

Solución:

$uv = (4 * 3) - (4 * 3) = 0 \Rightarrow$ que $cos\varphi = \frac{(u.v)}{(|u||v|)} = 0$, y como φ está en el intervalo $[o, \pi], \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Teorema: Los vectores u y v diferentes de cero son ortogonales si y sólo si $uv = 0$.

Muchos problemas interesantes se refieren a la noción de la proyección de un vector sobre otro. Antes de definir esto se demuestra en el siguiente Teorema.

Teorema: Sea v es un vector diferente de cero. Entonces para cualquier otro vector u el vector

$$w = u - \frac{(u.v)}{|v|^2} v$$

Es ortogonal a v

Matriz ortogonal

Una matriz Q de $n\ x\ n$ se llama ortogonal si Q es invertible: $Q^{-1} = Q^T$

Nota: Si $Q^{-1} = Q^T$, entonces $Q^T Q = I$

Teorema: La matriz Q de $n\ x\ n$ es ortogonal si y solo si las columnas de Q forman una base ortonormal para R^n.

Ejemplo: Sea la matriz $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Comprobar que es una matriz ortogonal.

Solución: $Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$Q^T.Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios propuestos sobre matrices ortogonales:

1. Demuestre que $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.
2. Demuestre que si $P\ y\ Q$ son matrices ortogonales de $n\ x\ n$, entonces PQ es ortogonal
3. Verifique el resultado del ejercicio 2

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \ y \ \ P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{8}}{3} \\ \frac{\sqrt{8}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4. Demuestre que para cualquier número real t, la matriz $A = \begin{pmatrix} sent & cost \\ cost & -sent \end{pmatrix}$
5. Demuestre que si Q es una matriz ortogonal simétrica, entonces $Q^2 = I$

Proyección ortogonal

Sean u y v dos vectores diferentes de cero. Entonces la proyección de u sobre v es un vector denotado por $proy_v u$, que se define por

$$proy_v u = \frac{(u.v)}{|v|^2} v$$

La componente de u en la dirección de v es $\frac{u.v}{|v|}$, y es un escalar.

Observe que $\frac{v}{|v|}$ es un vector unitario en la dirección de v

La $proy_v u$ es paralelo a v y $u - proy_v u$ es ortogonal a v

Ejemplo: Sean $u = 2i + 3j$ y $v = i + j$. Calcule $proy_v u$.

$$proy_v u = \frac{(u.v)}{|v|^2} v = \frac{5}{\left|\sqrt{2}\right|^2}$$

$$v = \left(\frac{5}{2}\right) i + \left(\frac{5}{2}\right) j$$

La proyección de (2,3) sobre (1,1) es $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$

Proyección ortogonal de un vector sobre el subespacio

Sean V un espacio vectorial real o complejo con Producto Interno, $b_1, \ldots., b_j$ algunos vectores ortogonales no nulos y $v \in V$. Definimos los vectores $u, w \in V$ de la siguiente manera:

$$u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\langle b_k, v\rangle}{\langle b_k, b_k\rangle} b_k \quad w = v - u$$

Entonces $w \perp \ell(b_1, \ldots., b_j)$.

Ejercicios propuestos de vectores ortogonales

Determine si los vectores dados son Ortogonales

1. $u = 3i + 5j$ y $v = -6i - 10j$
2. $u = 2i - 3j$ y $v = -9i + 6j$
3. $u = 2i + 3j$ y $v = 6i + 4j$
4. $u = 2i - 4j$ y $v = -i + 3j$
5. $u = 4i + 5j$ y $v = 5i + 4j$
6. Sean $u = -3i + 6j$ y $v = 2i + \delta j$. Determine que δ tal que:
   a) u y v son ortogonales
   b) El ángulo entre u y v es $\frac{\pi}{4}$
7. Sean $u = i + \beta j$ y $v = 2i + \gamma j$. Determine que β y γ tal que:
   c) u y v son ortogonales

d) El ángulo entre u y v es $\frac{\pi}{4}$

8. En los siguientes ejercicios calcular la $proy_v u$.

a) $u = i + j$ y $v = 2i - 3j$

b) $u = 4i - j$ y $v = -2i + 3j$

c) $u = 2i + j$ y $v = i - 2j$

d) $u = -i - 2j$ y $v = 5i + 7j$

e) $u = 7i + 2j$ y $v = 4i - 6j$

f) Sean $u = \beta i - \gamma j$ y $v = i + j$; β y γ reales positivos con $\beta > \gamma$

g) Sean $u = a_1 i + b_1 j$ y $v = a_2 i + b_2 j$. Establezca una condición sobre $a_1, b_1, a_2\ y\ b_2$ que asegure que v y $proy_v u$ tengan la misma dirección.

Proceso de ortogonalización de Gram−Schmidt

Sea V un espacio vectorial real o complejo con producto interno y sean $a_1, \ldots., a_m \in V$. Queremos construir vectores ortogonales $b_1, \ldots., b_m \in V$ de tal manera que para todo $j \in \{1, \ldots \ldots m\}$

$$\ell(b_1, \ldots., b_j) = \ell(a_1, \ldots., a_j)$$

La idea del proceso ortogonalización de Gram−Schmidt en el $j-$ é$simo$ paso definir el vector b_j como a_j menos la proyección ortogonal del vector del vector a_j al subespacio generado por los vectores $b_1, \ldots., b_{j-1}$.

En el $j-$ é$simo$ paso suponemos que los vectores $b_1, \ldots., b_{j-1}$ ya están construidos y son ortogonales entre sí. Buscamos b_j de la forma:

$$b_j = a_j - \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_{j,k} b_k$$

Donde:

$$\lambda_{j,k} = \begin{cases} \dfrac{\langle b_k, a_j \rangle}{\|b_k\|^2}, & b_k \neq 0 \\ 0, & b_k = 0 \end{cases}$$

Conservación de subespacios en el proceso de ortogonalización de Gram−Schmidt

Sea V un espacio vectorial real o complejo con producto interno y sean $a_1, \ldots., a_m \in V$. Denotemos por $b_1, \ldots., b_m$ a los vectores obtenidos de $a_1, \ldots., a_m$ al aplicar el método de ortogonalización de Gram−Schmidt.

$$b_j = a_j - \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_{j,k} b_k$$

$$\lambda_{j,k} = \begin{cases} \dfrac{\langle b_k, a_j \rangle}{\|b_k\|^2}, & b_k \neq 0 \\ 0, & b_k = 0 \end{cases}$$

Entonces para todo $j \in \{1, \ldots \ldots m\}$ los vectores $a_1, \ldots., a_j$ generan al mismo subespacio que los vectores $b_1, \ldots., b_j$:

$$\ell(a_1, \ldots., a_j) = \ell(b_1, \ldots., b_j)$$

Ortogonalización de Gram−Schmidt y dependencias lineales

Sean $a_1, \ldots., a_m$ una lista de vectores en V y $b_1, \ldots., b_m$ la lista obtenida de $a_1, \ldots., a_m$ al aplicar la ortogonalización de Gram−Schmidt.

Entonces para todo $j \in \{1, \dots \dots m\}$ las siguientes condiciones son equivalentes:

a) $a_j \in \ell(a_1, \dots., a_{j-1})$
b) $b_j = 0$
c) $a_1, \dots., a_m$ son linealmente independientes
d) Todos los vectores $b_1, \dots., b_m$ son no nulos

Ejemplo: Resolver la ortogonalización de Gram−Schmidt a la lista de vectores a_1, a_2, a_3:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Usando la matriz de Gram−Schmidt compruebe que la lista de vectores b_1, b_2, b_3 que se obtiene al final es ortogonal.

Solución: Igualamos $b_1 = a_1$. Calculamos la norma de b_1:

$$b_1 = a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\|b_1\|^2 = 16 + 4 + 1 + 4 = 25, \qquad \|b_1\| = 5$$

Construimos el vector b_2:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{2,1} = \frac{\langle b_1, a_2 \rangle}{\|b_1\|^2} = \frac{-24 - 6 - 4 - 16}{25} = \frac{-50}{25} = -2$$

De aquí:

$$b_2 = a_2 - \lambda_{2,1} b_1 = a_2 + 2b_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Calculamos la norma de b_2:

$$b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\|b_2\|^2 = 16 + 4 + 1 + 4 = 25, \qquad \|b_1\| = 5$$

Construimos el vector b_3:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{3,1} = \frac{\langle b_1, a_3 \rangle}{\|b_1\|^2} = \frac{20 + 10 + 3 - 8}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{3,2} = \frac{\langle b_2, a_3 \rangle}{\|b_2\|^2} = \frac{10 + 5 - 6 + 16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

De aquí:

$$b_3 = a_3 - \lambda_{3,1} b_1 - \lambda_{3,2} b_2 = a_3 - b_1 - b_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Calculamos la norma de b_3:

$$b_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\|b_3\|^2 = 1 + 4 + 16 + 4 = 25, \qquad \|b_3\| = 5$$

Para comprobar que los vectores b_1, b_2, b_3 son ortogonales calculamos la matriz de Gram−Schmidt:

$$G(b_1, b_2, b_3) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

Normalizamos los vectores b_1, b_2, b_3 (dividimos entre sus normas) y obtenemos la lista ortonormal.

$$c_1 = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} \qquad c_2 = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \\ 2/5 \\ -4/5 \end{bmatrix} \qquad c_3 = \begin{bmatrix} -1/5 \\ -2/5 \\ -4/5 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

Ejercicios propuestos sobre ortogonalización de Gram−Schmidt

1. Resolver la ortogonalización de Gram−Schmidt a la lista de vectores a_1, a_2, a_3, a_4:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad a_4 = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2. Resolver la ortogonalización de Gram−Schmidt a la lista de vectores a_1, a_2, a_3:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ 13 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3. Resolver la ortogonalización de Gram–Schmidt a la lista de vectores a_1, a_2, a_3:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

4. Resolver la ortogonalización de Gram–Schmidt a la lista de vectores a_1, a_2, a_3, a_4:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Subespacios vectoriales ortogonales

Dos subespacios S_1 y S_2 de V se denominan Subespacios Vectoriales Ortogonales si $(s_1, s_2) = 0$ para cada $s_1 \in S_1$ y para cada $s_2 \in S_2$.

Si S_1 y S_2 son ortogonales, escribiremos $S_1 \perp S_2$.

Consideremos el espacio Euclídeo Canónico R^n.

Se dice que $\vec{z}$ es ortogonal a un subespacio W de R^n si $\vec{z}$ es ortogonal a todo vector $\vec{w} \in W$.

Teorema: Si $\vec{z}$ es ortogonal al subespacio W de $R^n \Leftrightarrow \vec{z}$ es ortogonal a una base de W.

Se dice que W y H son subespacios de R^n son ortogonales entre sí, $\forall \vec{z} \in W$, $\vec{z}$ es ortogonal a H.

Teorema: Si W es ortogonal al subespacio de H de $R^n \Leftrightarrow$ los vectores de una base de W son ortogonales a los de una base de H.

Ejemplo: En el Espacio Euclídeo Canónico R^3, considera las rectas $r =< (1, a, 2) >$ y $s =< (1, -2,0) >$. Determine el o los valores de a tales que r y s sean subespacios ortogonales.

Solución: Las bases de r y s son respectivamente $\{(1, a, 2)\}$ y $\{(1, -2,0)\}$.

El producto escalar de los dos vectores es $1 - 2a$, $\therefore$ las rectas son ortogonales $\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

La Recta r es la siguiente $< (1,1/2,2) >$.

Complemento ortogonal de un subespacio

El conjunto de todos los vectores $\vec{z}$ que son ortogonales a W se denomina COMPLEMENTO ORTOGONAL de W y se denota $W^{\perp}$.

$$W^{\perp} = \{x \in R^n : x * w = 0 \; para \; todo \; w \in W$$

Teorema: Se cumplen los siguientes resultados sobre $W^{\perp}$, siendo W un subespacio del espacio Euclídeo R^n.

1. $W^{\perp}$ es un subespacio de R^n
2. $(W^{\perp})^{\perp} = W$
3. $W \oplus W^{\perp} = R^n$
4. $W \cap W^{\perp} = \{0\}$
5. $\text{Dim } W^{\perp} = n - \dim W$

Todo subespacio $W \subset R^n$ (salvo el $\vec{0}$ y el propio R^n) admite infinitos subespacios complementarios, pero solo uno de ellos es complemento ortogonal respecto al producto que se haya adoptado.

Ejemplo: En el Espacio Euclídeo Canónico R^3 el subespacio W, se tiene que $\forall \vec{z} \in L$ y $\forall \vec{w} \in W$, $\vec{z} * \vec{w} = 0$.

Solución: Tomamos por ejemplo el caso de $W =< (1,0,0),(0,1,0) >$.

Los vectores ortogonales a W serán los $(x, y, z) \in R^3$ ortogonales a la base de W, es decir, que:

$$\begin{cases} (x,y,z) * (1,0,0) = 0 \\ (x,y,z) * (0,1,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad W^{\perp} =< (0,0,1) >$$

Para obtener los vectores ortogonales a (a, b, c) en R^3 hay que resolver la ecuación $(a, b, c) * (x, y, z) = 0$, es decir, la ecuación lineal homogénea $ax + by + cz = 0$.

$ax + by + cz = 0$ es la forma implícita de un subespacio bidimensional W de R^3, y expresa que W y $< (a, b, c) >$ son complementos ortogonales.

Los vectores (x, y, z) de W y los vectores de $W^{\perp} =< (a, b, c) >$ son ortogonales entre sí.

Ejemplo: Sea $\{(3,2,2,4), (1,0,0,2), (1, -1, -1,1)$ un sistema generador de F, subespacio vectorial del espacio Euclídeo Canónico es R^4. Hallar una base del complemento ortogonal de F.

Solución: Los vectores ortogonales a los dados serán (x, y, z, t) que cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} (x, y, z, t) * (3,2,2,4) = 0 \\ (x, y, z, t) * (1,0,0,2) = 0 \\ (x, y, z, t) * (1, -1, -1,1) = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad F^{\perp} = \begin{cases} 3x + 2y + 2z + 4t = 0 \\ x + 2t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

Las tres ecuaciones forman un Sistema de Ecuaciones Lineales Homogéneos por lo que $F^{\perp}$ es un subespacio vectorial. Para obtener la base de $F^{\perp}$ hay que resolver el sistema de ecuaciones.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)_{f_3 \leftrightarrow f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)_{\substack{f_2 - f_1 \\ -3f_1 + f_3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{-5f_2+f_3 \\ f_2+f_1}}{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Tenemos 3 ecuaciones, rango 3 y 4 incógnitas. Por lo tanto $4 - 3 = 1$ parámetro libre.

Tomamos z como parámetro libre:

$$-4t = 0 \qquad \Rightarrow t = 0$$

$$y + z + t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y + z + 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y + z = 0$$
$$\Rightarrow \quad y = -z$$

$$x + 2t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -2t \qquad \Rightarrow \qquad x = 0$$

El vector solución es $(x, y, z, t) = (0, -z, z, 0) \quad \forall z \in R$

El conjunto de vectores ortogonales a los tres dados es un subespacio vectorial de dimensión 1. Una posible base es: $\{(0, -1,1,0)\}$

Nótese que el enunciado F viene dado por un sistema generador, ese sistema es base, ya que al resolver las implícitas de $F^{\perp}$ se encontró en la fila 3.

Ejercicios propuestos sobre bases de subespacios ortogonales

1. Se considera el espacio vectorial Euclídeo Canónico R^3 y en él los siguientes subespacios vectoriales:

$W_1 =< (1,1,0), (0,3,6) >$, $W_2 =< (1,2,1) >$ y $W_3 =< (7,8,5), (6,3,1), (1,3,6) >$. Hallar las bases de los subespacios ortogonales correspondientes $W_1^{\perp}$, $W_2^{\perp}$, $W_3^{\perp}$.

Respuesta

$W_1^{\perp} =< (2,-2,1) >$

$W_2^{\perp} =< (-2,1,0), (-1,0,1) >$

$W_3^{\perp} =< (0,0,0) >$

2. Se considera el espacio vectorial Euclídeo Canónico R^3 y el subespacio vectorial W dado por $2x + y - z = 0$. Hallar $W^{\perp}$.

Respuesta

$W^{\perp} =< (2,1,-1) >$

3. Se considera el espacio vectorial Euclídeo Canónico R^3 y el subespacio vectorial W dado por la forma implícita siguiente: $\begin{cases} x + 4y + 8z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$. Hallar $W^{\perp}$.

Respuesta

$W^{\perp} =< (1,4,8), (1,-1,1) >$

4. Obtén una base del complemento ortogonal de:
   $W =< (-1,0,0,1), (4,1,-1,-2), (3,1,-1,-1) >$. Hallar $W^{\perp}$.

Respuesta

$W^{\perp} =< (t, z-2t, z, t) >$

$B = \{(1,-2,0,1), (0,1,1,0)\}$

5. Se considera en R^4 el subespacio W de ecuaciones implícitas: $\begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x + t = 0 \end{cases}$, una base ortogonal del complemento ortogonal de W. Hallar $W^{\perp}$.

Respuesta

$W^{\perp} =< (-z, -z, z, -z) >$

$$B = \left\{\frac{(1,0,0,1)}{\sqrt{2,}}, \frac{(1,1,-1,1)}{2}\right\}$$

Coordenadas de un vector

El sector en R^n cuyas componentes son los coeficientes de v, espresando como $[v]_B$, se llama coordenadas de un vector o vector coordenado de v con respecto a B:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} e_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

Cuando $[v]_B$ se modifica cambia la base de B. También $[v]_B$ depende del orden de los elementos de B. Mantendremos fijo este orden usando siempre una base ordenada. Recuerde la definición matemática de conjunto, el orden de los elementos no afecta el conjunto, sin embargo, en la definición de base ordenada el orden es importante.

Ejemplo: Determine el polinomio $p(x)$ sabiendo que su coordenada de un vector respecto a la base es:

$$B = \{v_1 = 3 - 9x,\ v_2 = -7 - 6x\}$$

$$[p(x)]_B = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Recuerde que las coordenadas de un vector se forman con los coeficientes de la combinación lineal de los elementos de la base para dar el vector:

$$p(x) = -7v_1 + 3v_2$$

$$p(x) = -7(3 - 9x) + 3(-7 - 6x)$$

$$p(x) = -21 + 63x - 21 - 18x$$

$$p(x) = 45x - 42$$

Ejemplo: Determine la matriz m sabiendo que su coordenada del vector respecto a la base es:

$$B = \left\{\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$[m]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Solución: Se aplica la definición de las coordenadas de un vector:

$$m = -1\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo los productos:

$$m = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -21 & -9 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$m = \begin{bmatrix} -28 & -18 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: En P_1, determine el vector coordenadas del polinomio:

$$p(x) = -2 - 5x$$

$$B = \{v_1 = 2 - 4x, v_2 = 4 + x\}$$

Solución:

$$-2 - 5x = c_1(2 - 4x) + c_2(4 + x)$$

$$-2 - 5x = (2c_1 - 4c_1) + (4c_2 + c_2)$$

$$\begin{cases} 2c_1 + 4c_2 = -2 \\ -4c_1 + c_2 = -5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -2 \\ -4 & 1 & -5 \end{array}\right)_{\to \frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{array}\right)_{\to 4f_1 + f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & -9 \end{array}\right)_{\to \frac{1}{9}f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)_{\to -2f_2 + f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$\therefore c_1 = 1$ y $c_2 = -1$

$$[p(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: En M_{2x2}, determine las coordenadas de vector de la siguiente matriz:

$$m = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución: Buscamos c_1, c_2, c_3, c_4

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4c_1 & -4c_1 \\ 0c_1 & -5c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3c_2 & 0c_2 \\ -1c_2 & -5c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5c_3 & -2c_3 \\ -1c_3 & -2c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5c_4 & -4c_4 \\ 5c_4 & 1c_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4c_1 - 3c_2 - 5c_3 + 5c_4 = -4 \\ -4c_1 + 0c_2 - 2c_3 - 4c_4 = -1 \\ 0c_1 - 1c_2 - 1c_3 + 5c_4 = 5 \\ -5c_1 - 5c_2 - 2c_3 + 1c_4 = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & -5 & 5 & -4 \\ -4 & 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ -5 & -5 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & -5 & 5 & -4 \\ -4 & 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ -5 & -5 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)_{\to \frac{1}{4}f_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & -1 \\ -4 & 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ -5 & -5 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)_{\substack{\to 4f_1+f_2 \\ \to 5f_1+f_4}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & -3 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & -\frac{35}{4} & -\frac{33}{4} & \frac{29}{4} & -1 \end{array}\right) \underset{\to -\frac{1}{3}f_2}{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & -\frac{35}{4} & -\frac{33}{4} & \frac{29}{4} & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \frac{3}{4}f_2 + f_1 \\ \to f_2 + f_3 \\ \to \frac{35}{4}f_2 + f_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} & \frac{20}{3} \\ 0 & 0 & \frac{73}{6} & \frac{13}{3} & \frac{163}{12} \end{array}\right) \underset{\to \frac{3}{4}f_3}{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{73}{6} & \frac{13}{3} & \frac{163}{12} \end{array}\right) \begin{array}{l} \to -\frac{7}{3}f_3 + f_2 \\ \to -\frac{1}{2}f_3 + f_1 \\ \to -\frac{73}{6}f_2 + f_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{2} & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{153}{4} & -\frac{189}{4} \end{array}\right) \underset{\to -\frac{4}{153}f_4}{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{2} & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{21}{17} \end{array}\right) \begin{array}{l} \to -\frac{7}{2}f_4 + f_3 \\ \to \frac{17}{2}f_4 + f_2 \\ \to \frac{3}{4}f_4 + f_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{45}{34} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{23}{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{21}{17} \end{array}\right)$$

$$\therefore [m]_B = \begin{bmatrix} -\frac{45}{34} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{23}{34} \\ \frac{21}{17} \end{bmatrix}$$

Ángulo entre vectores

Sean u y v dos vectores diferentes de cero. Entonces el ángulo φ entre u y v está definido como el ángulo no negativo más pequeño entre las representaciones de u y v que tienen el origen como punto inicial. Si $u = \alpha v$ para algún escalar α, entonces $\varphi = 0$ si $\alpha > 0$ y $\varphi = \pi$ si $\alpha < 0$.

Observe que φ siempre se puede elegir para que sea un ángulo no negativo en el intervalo $[0, \pi]$. El ángulo φ entre dos vectores u y v en R^2 es el único número en $[0, \pi]$ que satisface:

$$cos\varphi = \frac{u.v}{|u||v|}$$

Teorema: Sean u y v dos vectores diferentes de cero. Si φ es el ángulo entre ellos, entonces:

$$cos\varphi = \frac{u.v}{|u||v|}$$

Ejemplo: Calcular el ángulo entre los vectores $u = 2i + 3j$ y $v = -7i + j$

Solución:

$$uv = (ai + bj) = (2i + 3j)(-7i + j) = -14 + 3 = -11$$

$$|u| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

$$cos\varphi = \frac{u.v}{|u||v|}$$

$$cos\varphi = \frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{50}} = \frac{-11}{\sqrt{650}} = -0{,}431455497$$

$$\varphi = cos^{-1}(-0{,}431455497) = 115{,}6°$$

Como: $0 \leq \varphi \leq \pi, cos^{-1}cos\varphi = \varphi$

Ejercicios propuestos de ángulos entre vectores

1. Calcular el ángulo entre los vectores, sabiendo que: $u = i + j$ y $v = i - j$
2. Calcular el ángulo entre los vectores, sabiendo que: $u = 2i + 5j$ y $v = 5i - 2j$
3. Calcular el ángulo entre los vectores, sabiendo que: $u = 4i + 4j$ y $v = 5i - 4j$
4. Calcular el ángulo entre los vectores, sabiendo que: $u = 7i + 6j$ y $v = -8i + 3j$
5. Calcular el ángulo entre los vectores, sabiendo que: $u = -3i + 8j$ y $v = -2i + 9j$

APLICACIONES LINEALES

Introducción

Las aplicaciones lineales son también llamadas operadores o transformaciones lineales entre espacio vectoriales sobre un mismo campo. Se debe considerar que una transformación es una función que mantienen las operaciones de espacio vectorial, los neutros e inversos.

El capítulo está estructurado de la siguiente manera: Inicia con la definición y propiedades de una aplicación lineal; Luego se presenta la forma de obtener el Núcleo, imagen y dimensión de una aplicación lineal; Se definen un Isomorfismo entre operadores lineales; Se analizan la relación que existe entre una aplicación lineal, una matriz y una base; se determina el rango de una Aplicación lineal; finalmente se presentan los temas matriz de cambio de base y la obtención de bases ortonormales, para esto se aplica el proceso de Gram-Schmidt trabajado en el capítulo 4.

Las aplicaciones lineales son también llamadas operadores o transformaciones lineales entre espacio vectoriales sobre un mismo campo. Se debe considerar que una transformación es una función que mantienen las operaciones de espacio vectorial, los neutros e inversos.

Definición de aplicación lineal

Dados V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, una función $\varphi: V \to W$, es una aplicación o transformación lineal sobre $\mathbb{K}$, si y sólo si, para todo par de vectores $v_1, v_2 \in V$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifica:

$$\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$$

$$\varphi(\alpha v_1) = \alpha\varphi(v_1)$$

Dicho de otra manera, $\varphi: V \to W$ es lineal, si "preserva" las dos operaciones básicas de un espacio vectorial: a) la adición de vectores; b) la multiplicación por escalar. Podría decirse también que una aplicación lineal no es otra cosa que una función definida entre espacios vectoriales, o que, la imagen de una combinación lineal es la combinación lineal de las imágenes. Esto también se puede escribir, utilizando las dos condiciones de linealidad, de esta manera.

Para todo escalar $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y todo vector $v_1, v_2 \in V$, se obtiene:

$$\varphi(\alpha v_1 + \beta v_2) = \varphi(\alpha v_1) + \varphi(\beta v_2) = \alpha\varphi(v_1) + \beta\varphi(v_2)$$

En algunos libros, se utiliza esta expresión $\varphi(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\varphi(v_1) + \beta\varphi(v_2)$ para definir una aplicación lineal, ya que la caracteriza completamente.

En virtud de lo anterior, se puede generalizar diciendo que, para todo escalar $\alpha_i \in \mathbb{K}$ y todo vector $v_i \in V$, se obtiene la propiedad básica de las aplicaciones lineales:

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \varphi(v_1) + \alpha_2 \varphi(\beta v_2) + \cdots + \alpha_n \varphi(\beta v_n)$$

Ejemplo: Sea $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la aplicación "proyección" en el plano xy: $\varphi(x, y, z) = (x, y, 0)$. Ver si e φ es lineal.

Para ello considerar $v_1 = (r, s, t)$ y $v_2 = (r', s', t')$. Entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(v_1 + v_2) &= \varphi[(r, s, t,) + (r', s', t')] = \varphi[r + r', s + s', t + t'] \\ &= (r + r', s + s', 0) = (r + s + 0) + (\, r' + s' + 0) \\ &= \varphi(v_1) + \varphi(v_2)\end{aligned}$$

Ahora, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha v_1) = \varphi\big(\alpha(r, s, t)\big) &= \varphi(\alpha r + \alpha s + \alpha t) = (\alpha r + \alpha s + 0) \\ &= \alpha(r + s + 0) = \alpha\varphi(v_1)\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ es lineal, ya que cumple con las dos operaciones básicas de linealidad: Suma de vectores y producto por escalar.

Ejemplo: Considerar una aplicación lineal de $\Re^3$ en $\Re^2$, verificar si es lineal:

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 = (x, y, z) \mapsto (2x, z)$$

Vamos a considerar $v_1 = (r, s, t)$ y $v_2 = (r', s', t')$, con $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(v_1 + v_2) &= \varphi[(r, s, t,) + (r', s', t')] = \varphi[r + r', s + s', t + t'] \\ &= (2(r + r'), t + t') = (2r + 2r', t + t') = (2r, t + 2r', t') \\ &= \varphi(v_1) + \varphi(v_2)\end{aligned}$$

Ahora, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha v_1) &= \varphi\big(\alpha(r, s, t)\big) = \varphi(\alpha r + \alpha s + \alpha t) = (2\alpha r + \alpha t) = \alpha(2r + t) \\ &= \alpha\varphi(v_1)\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ es lineal, ya que cumple con las dos operaciones básicas de linealidad: Suma de vectores y producto por escalar.

Ejemplo: Considerar una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, verificar si es lineal:

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 = \varphi\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ 2y \end{bmatrix}$. Por ejemplo, $\varphi\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Entonces, si consideramos los vectores $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, se tendría que:

$$\varphi\left[\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right]=\varphi\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+y_1+y_2\\x_1+x_2-y_1-y_2\\-2y_1-2y_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_1-y_1\\-2y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2+y_2\\x_2-y_2\\-2y_2\end{bmatrix}$$

Pero: $\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_1-y_1\\-2y_1\end{bmatrix}=\varphi\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\varphi v_1$ y $\begin{bmatrix}x_2+y_2\\x_2-y_2\\-2y_2\end{bmatrix}=\varphi\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\varphi v_2$

Entonces, $\varphi\left[\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right]=\varphi\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\varphi\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\varphi v_1+\varphi v_2$

Y también, $\varphi\left[\alpha\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right]=\varphi\begin{bmatrix}\alpha x_1\\\alpha y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha x_1+\alpha y_1\\\alpha x_1-\alpha y_1\\-2\alpha y_1\end{bmatrix}=$

$\alpha\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_1-y_1\\-2y_1\end{bmatrix}$ $\alpha\varphi\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$

Por lo tanto, φ es lineal, ya que cumple con las dos operaciones básicas de linealidad: Suma de vectores y producto por escalar.

Ejemplo: Considerar una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^4$, verificar si es lineal:

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4=(x,y)\mapsto(x,y,x+y,1)$$

Vamos a considerar $v_1=(r,s)$ y $v_2=(r',s')$, con $v_1,v_2\in\mathbb{R}^2$, entonces:

$$\begin{aligned}\varphi(v_1+v_2)=\varphi[(r,s)+(r',s')]=\varphi[r+r',s+s']\\ =(r+r',s+s',r+r'+s+s',1)\\ =(r,s,r+r',1+r',s',s+s',0)\\ =\varphi(v_1)+(r',s',s+s',0)\end{aligned}$$

$$\varphi(v_2)\neq(r',s',s+s',0)$$

Por lo tanto φ no es una aplicación lineal

Se puedo tomar un caso concreto y si no se cumplen las condiciones, la aplicación no es lineal. Tomemos por ejemplo, para el mismo ejemplo 4, el vector (1,0). Aplicando las propiedades directamente, se tiene:

$$(x,y)\mapsto(x,y,x+y,1)$$

$$(1,0)\mapsto(1,0,1,1)$$
$$2(1,0)=(2,0)\mapsto(2,0,2,1)$$

Al multiplicar el vector por el escalar $k=2,$ no se cumple la aplicación, ya que el último término, no queda multiplicado por el escalar.

Ejercicios propuestos sobre la definición de aplicaciones lineales

1) Mostrar que las siguientes aplicaciones son lineales.
   a) $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x,y)=(x+y,x)$

b) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y) = (2x - y, x)$

c) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y, z) = (z, x + y)$

d) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$

e) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

2) Mostrar que las siguientes aplicaciones no son lineales.

a) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x, y) = xy$
b) $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$
c) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y, z) = (x + 1, y + z)$

Propiedades de las aplicaciones lineales

Teorema. Sea $\varphi: V \to W$ una transformación lineal, entonces se cumple que:

i. $\varphi(0_V) = 0_W$. Es decir que toda aplicación envía el vector cero en el vector cero.

ii. $\varphi(v_i - v_j) = \varphi(v_i) - \varphi(v_j)$

Demostración:

i. $\varphi(\alpha v_i) = \alpha\varphi(v_i)$

si se sustituye el escalar $\alpha = 0$, se tiene:

$$\alpha v_i = 0v_i = 0_V$$

$$\varphi(0_V) = 0_W$$

ii. $\varphi(v_i - v_j) = \varphi\left(v_i + (-1v_j)\right)$

$$= \varphi(v_i) + \varphi(-1v_j)$$

$$= \varphi(v_i) - 1\varphi(v_j)$$

$$= \varphi(v_i) - \varphi(v_j)$$

Isomorfismo

Antes de plantear la definición de Isomorfismo, es necesario conocer las definiciones de Inyectividad (o 1-1) y sobreyectividad.

Definición: Sea $\varphi: V \to W$ una transformación lineal, se dice que es uno a uno (1-1) si: $\varphi v_1 = \varphi v_2$, enronces $v_1 = v_2$

En otras palabras, φ es 1-1 si y sólo si todo vector w en la imagen de φ es imagen nada más que de vector de V.

Teorema: Si $\varphi: V \to W$ una transformación lineal, entonces φ es 1-1 si y sólo si $Ker\ \varphi = \{0\}$.

Demostración:

a) Se va a demostrar que, si $Ker\ \varphi = \{0\}$ entonces φ es 1-1. Suponer que $Ker\ \varphi = \{0\}$ y $\varphi v_1 = \varphi v_2$, entonces $\varphi v_1 - \varphi v_2 = 0$, esto significa que $(v_1 - v_2) \in Ker\ \varphi = \{0\}$. De esta manera se tiene que $v_1 - v_2 = 0$ y de aquí se tiene que $v_1 = v_2$, con esto se demuestra que φ es 1-1.

b) Ahora se va a demostrar que si φ es 1-1, entonces $Ker\ \varphi = \{0\}$. Para ello suponer que φ es 1-1 y $\varphi v_1 = 0$. Pero resulta que $\varphi(0) = 0$. Entonces como φ es 1-1, se tiene que $v_1 = 0$, con lo que está demostrada la segunda implicación.

Definición: Sea $\varphi: V \to W$ una transformación lineal, se dice que φ es sobreyectiva (sobre) si para todo $w \in W$, existe al emnos un $v \in V$, tal que $\varphi(v) = w$. En otras palabras φ es sobre si y sólo si $Im\ \varphi = W$.

Teorema: Sea $\varphi: V \to W$ una transformación lineal, suponiendo que $\dim V = \dim W = n$, se tiene que:

I. Si φ es 1-1, entonces φ es sobre.
II. Si φ es sobre, entonces φ es 1-1.

Demostración:

Sea A_φ una representación matricial de φ:

I. Entonces, si φ es 1-1, $Ker\ \varphi = \{0\}$ y $v(A_\varphi) = 0$, lo que significa que $rang\ A = rang\ A_\varphi = n - 0 = n$, de manera que $Im\ \varphi = W$.
II. Ahora, si φ es sobre, entonces $rang\ A_\varphi = n$; por lo que $v(T) = v(A_\varphi) = 0$ y φ es 1-1.

Definición: Isomorfismos. Una aplicación lineal $\varphi: V \to W$ es un isomorfismo si es uno a uno y sobre. Se dice que los espacios vectoriales V, W son isomorfos si existe un isomorfismo de V sobre W.

Definición: Espacios vectoriales Isomorfos. Se dice que los espacios vectoriales V y W son isomorfos si existe un isomorfismo φ de V sobre W. En este caso se escribe $V \cong W$.

Núcleo e imágenes de la aplicación lineal

Definición: Sea $\varphi: V \to W$ una aplicación lineal. La imagen de φ, se representa por $Im\ \varphi$, es el conjunto de las imágenes de los puntos de V en W, es decir:

$$Im\ \varphi = \{w \in W: \varphi(v) = w, para\ algún\ \ v \in V\}$$

Dicho de otra forma, la Imagen está formada por los vectores del espacio de llegada que son imágenes de algún vector del espacio de partida

Definición: Sea $\varphi: V \to W$ una aplicación lineal. El núcleo o Kernel de φ, que se escribe $Ker\ \varphi$, es el conjunto de los elementos de V que se aplican en el cero de W, es decir:

$$Ker\ \varphi = \{v \in V: \varphi(v) = 0 \in W\}$$

En otras palabras, el núcleo o Kernel está formado por todos los vectores del espacio de partida que al aplicar la función se obtiene el vector nulo.

Proposición: Sea $\varphi: V \to W$ una aplicación lineal, entonces $Ker\ \varphi$ y $Im\ \varphi$ son subespacios vectoriales de V y W, respectivamente.

Demostración:

Tomando la expresión de 5.1. $\varphi(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\varphi(v_1) + \beta\varphi(v_2)$ que se usa también para definir una aplicación lineal que es un espacio vectorial, se toman dos vectores cualesquiera v_1 y $v_2 \in Ker\ \varphi$, se debe ver que $\alpha v_1 + \beta v_2$ también están en el $Ker\ \varphi$. Y es fácil deducir que es cierto ya que si $\varphi(v_1)$ y $\varphi(v_2) \in Ker\ \varphi$ significa que $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = 0$, entonces

$$\varphi(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\varphi(v_1) + \beta\varphi(v_2) = \alpha(0) + \beta(0) = 0$$

Del mismo modo si w_1 y $w_2 \in Im\ \varphi$, ver si $\alpha w_1 + \beta w_2$ está en $Im\ \varphi$. En efecto

$$\left.\begin{array}{l} w_1 \in Im\ \varphi \implies \exists\ v_1 \in V: \varphi(v_1) = w_1 \\ w_2 \in Im\ \varphi \implies \exists\ v_2 \in V: \varphi(v_2) = w_2 \end{array}\right\}$$

Luego:

$$\alpha w_1 + \alpha w_1 = \alpha\varphi(v_1) + \beta\varphi(v_2) = \varphi(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

Como $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$, se tiene el resultado esperado.

Ejemplo: Sea $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación definida por:

$$\varphi(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)$$

Hallar una base y la dimensión de, (i) la imagen Im de φ, (ii) el núcleo Ker de φ.

i) Las imágenes de los siguientes generadores de $\Re^4$, general una imagen U de φ.

$$\varphi(1,0,0,0) = (1, 1, 1); \;\; \varphi(0,1,0,0) = (-1, 0, 1);$$

$$\varphi(0,0,1,0) = (1,2,3\,); \;\; \varphi(0,0,0,1) = (1, -1, -3);$$

Se forma la matriz cuyas filas son los generadores de U y se la reduce por filas a la forma escalonada.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}_{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4-F_1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}_{\substack{F_3=F_3-F_2 \\ F_4=F_4+2F_2}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, $\{(1,1,1), (0,1,2)\}$ es una base de U; por lo tanto $\dim(Im\ \varphi) = 2$

ii) Para encontrar el núcleo o Kernel de φ, se busca la solución para

$$\varphi(x, y, s, t) = (0,0,0,0)$$

Ósea:

$$\varphi(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)$$
$$= (0,0,0)$$

Se forma un sistema homogéneo de ecuaciones igualando los vectores correspondientes de los vectores:

$$\begin{aligned} x - y + s + t &= 0 \\ x + 2s - t &= 0 \\ x + y + 3s - 3t &= 0 \end{aligned} \underset{F_3 = F_3 - F_1}{F_2 = F_2 - F_1} \rightarrow \begin{aligned} x - y + s + t &= 0 \\ y + s - 2t &= 0 \\ 2y + 2s - 4t &= 0 \end{aligned} \underset{F_3 = F_3 - 2F_2}{}$$

$$\rightarrow \begin{aligned} x - y + s + t &= 0 \\ y + s - 2t &= 0 \end{aligned}$$

Existen dos variables libres, s y , t, por lo tanto, $dim(Ker\ \varphi) = 2$. Ahora se dan valores arbitrarios a las variables libres para encontrar una base del núcleo de φ.

Por ello se da:

a) $s = -1, t = 0$, al remplazar estos valores en la ecuación 2 se tiene:

$$y + s - 2t = 0 \rightarrow y - 1 - 0 = 0 \rightarrow y = 1$$

Remplazando ahora los tres valores en la ecuación (1) se tiene:

$$x - y + s + t = 0 \rightarrow x - 1 - 1 + 0 = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

Por esto se tiene que una solución del sistema es: $(2, 1, -1, 0)$

b) $s = 0, t = 1$, al remplazar estos valores en la ecuación (2) se tiene:

$$y + s - 2t = 0 \rightarrow y + 0 - 2 = 0 \rightarrow y = 2$$

Remplazando ahora los tres valores en la ecuación (1) se tiene:

$x - y + s + t = 0 \rightarrow x - 2 + 1 + 0 = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

Por esto se tiene que una solución del sistema es: $(1, 2, 0, 1)$

Luego, $\{(2, 1, -1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ es una base del núcleo $Ker\ \varphi$.

Es importante observar que $\dim(Ker\ \varphi) + \dim(Im\ \varphi) = 2 + 2 = 4$, que es la dimensión del dominio $\mathbb{R}^4$ de φ.

Ejercicios Propuestos de aplicaciones lineales:

1) Mostrar que las siguientes aplicaciones son lineales.
   a) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y) = (x + y, x)$
   b) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x, y) = (2x - y, x)$

Dimensión de la aplicación lineal

Teorema: Sea V de dimensión finita y sea $\varphi: V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces,

$$\dim V = \dim(Ker\ \varphi) + \dim(Im\ \varphi)$$

Esto quiere decir que la dimensión del dominio de una aplicación es igual a la suma de las dimensiones del núcleo y la imagen.

Ejemplo: Sea $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida como la proyección en el plano

$$xy: \varphi(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Se tiene que la imagen de φ es el plano xy, es decir:

$$Im\ \varphi = \{(a, b, 0): a, b \in \mathcal{R}\}$$

Y, al ser un plano,

$$\dim(Im\ \varphi) = 2$$

El núcleo de φ, son todos los puntos del dominio $\mathcal{R}^3$ que se aplican en el cero (0,0,0) del conjunto de llegada $\mathbb{R}^3$. Y los puntos que dan al origen del codominio $\mathcal{R}^3$, son todos los puntos del eje z, $(0,0,c)$, es decir:

$$Ker\ \varphi = \{(0,0,c): c \in \mathcal{R}\}$$

Y, al ser una línea,

$$\dim(Ker\ \varphi) = 1$$

Entonces, la dimensión de V, en este caso es:

$$\dim V = dim\mathcal{R}^3 = \dim(Ker\ \varphi) + \dim(Im\ \varphi) = 1 + 2 = 3$$

Aplicación lineal asociada a una matriz

Sea φ un operador lineal en un espacio vectorial V sobre un cuerpo K y base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V. Ahora consideremos los vectores $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ en V, cada uno, como resultado de una combinación lineal de los elementos de la base $\{e_i\}$, de la siguiente forma:

$$\varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n$$

$$\varphi(e_2) = a_{21}e_2 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_2$$

$$\dots$$

$$\varphi(e_1) = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n$$

Siendo una combinación lineal. Podemos decir que:

Definición: La transpuesta de la matriz formada por los coeficientes de los vectores anteriores, denotada por $[\varphi]_e$ o simplemente $[\varphi]$, se denomina la *representación matricial de φ relativa a la base* $\{e_i\}$, aunque también se le puede llamar *matriz de φ en la base* $\{e_i\}$, y se escribe así:

$$[\varphi]_e = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Sea V el espacio vectorial de los polinomios en t sobre $\mathbb{R}$ de grado ≤ 3, y $D: V \to V$ el operador de derivación definido por $D\big(p(t)\big) = \frac{d(p(t))}{dt}$. Calcular la matriz D en la base $\{1, t, t^2, t^3 - 1\}$. Se tiene que:

$$D(1) = 0 = 0 + 0t + 0t^2 + 0t^3$$

$$D(t) = 1 = 1 + 0t + 0t^2 + 0t^3$$

$$D(t^2) = 2t = 0 + 2t + 0t^2 + 0t^3$$

$$D(t^3) = 0 = 0 + 0t + 3t^2 + 0t^3$$

De esta lista de vectores se define la matriz transpuesta de sus coeficientes, y se obtiene:

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta es la representación matricial de D relativa a la base $\{t_i\}$

Ejemplo: Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$. Calcular la matriz T en la base $\{f_1 = (1, 1), f_2 = (-1,0)\}$. Se tiene que:

$$T(f_1) = T(1, 1) = (4 - 2, 2 + 1) = (2, 3) = 3(1, 1) + (-1,0) = 3f_1 + f_2$$

$$T(f_2) = T(-1,0) = (-4-0, -2+0) = (-4,-2) = -2(1,1) + 2(-1,0)$$
$$= -2f_1 + 2f_2$$

De esta lista de vectores se define la matriz transpuesta de sus coeficientes, y se obtiene:

$$[T]_f = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta es la representación matricial de T relativa a la base $\{f_i\}$

Ejemplo: Hallar la representación lineal del operador T en el problema anterior respecto a la base $\{f_1 = (1,2), f_2 = (2,5)\}$.

En este caso se determinan las coordenadas de un vector arbitrario $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ con respecto a la base $\{f_i\}$. Entonces se obtiene:

$$(a,b) = x(f_1) + y(f_2) = x(1,2) + y(2,5) = (x+2y, 2x+5y)$$

Por lo que:

$$x + 3y = a$$

$$2x + y = b$$

Resolviendo x é y en términos de a y b se tiene:

$$x = 6a - 2b \quad \text{y} \quad y = -2a + b$$

Por lo tanto, se puede decir que:

$$(a, b) = x(f_1) + y(f_2) = (6a - 2b)f_1 + (-2a + b)f_2$$

Como:

$$T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$$

Entonces:

$$T(f_1) = T(1,2) = \big(4(1) - 2(2), 2(1) + (2)\big) = (4 - 2, 2 + 2) = (2,4)$$
$$= 4f_1 + 0f_2$$

$$T(f_2) = T(2,5) = (4(2) - 2(5), 2(2) + 5) = (-2,9) = -30f_1 + 13f_2$$

De esta lista de vectores se define la matriz transpuesta de sus coeficientes, y se obtiene:

$$[T]_f = \begin{bmatrix} 4 & -30 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Esta es la representación matricial de T relativa a la base $\{f_i\}$

En este momento es importante recordar lo que una matriz cuadrada A de orden n sobre K define un operador lineal sobre K^n por medio de la aplicación $v \mapsto Av$ (donde v está representado como un vector columna). La representación matricial de este operador es la matriz A si se toma la base usual de K^n.

Ejercicios propuestos de una aplicación lineal asociada a una matriz:

1) Hallar la representación matricial de cada uno de los siguientes operadores T sobre $\mathbb{R}^2$ respecto a la base usual $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$:

   i. $T(x,y) = (2y, 3x - y)$. Respuesta: $[T]_e = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

   ii. $T(x,y) = (3x - 4y, x + 5y)$. *Respuesta:* $[T]_e = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

2) Hallar la representación lineal de cada operador T en el problema anterior respecto a la base $\{f_1 = (1,3), f_2 = (2,5)\}$.

   a) Respuesta: $[T]_f = \begin{bmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{bmatrix}$

   b) Respuesta: $[T]_f = \begin{bmatrix} 77 & 124 \\ -43 & -69 \end{bmatrix}$

Matriz asociada a una aplicación lineal

Se presenta el siguiente teorema que dice que la acción del operador φ sobre un vector v se preserva por su representación matricial.

Teorema. Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de V y φ un operador sobre V. Entonces se tiene que para todo vector $v \in V$, $[\varphi]_e[v]_e = [\varphi(v)]_e$.

Ejemplo: Sea el operador de derivación $D: V \to V$ definido por $D\big(p(t)\big) = \frac{d(p(t))}{dt}$, en un espacio vectorial de polinomios en $\mathbb{R}$ de grado

$n \leq 3$. Sea $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$, aplicando el operador derivación se obtendrá $D\big(p(t)\big) = b + 2ct + 3dt^2$.

Según esto, se tendría: $[p(t)] = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ y $\big[D\big(p(t)\big)\big] = \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{pmatrix}$

Según el teorema, se tendría que:

$$[D][p(t)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2b \\ 3c \\ 0 \end{bmatrix} = \big[D\big(p(t)\big)\big]$$

Ejemplo: Sea el operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$ y sea también $v = (5, 7)$. La base considerada es $\{f_1 = (1, 1), f_2 = (-1,0)\}$. Entonces:

$$v = (5, 7) = 7(1, 1) + 2(-1, 0) = 7f_1 + 2f_2$$

$$T(v) = (6, 17) = 17(1, 1) + 11(1, 0) = 17f_1 + 11f_2$$

Por lo que, relativo a la base dada $\{f_1, f_2\}$, se tiene:

$$[v]_f = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T(v)]_f = \begin{bmatrix} 17 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Ahora consideremos la matriz: $[T]_f = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ obtenida en el ejemplo 2 del apartado anterior y se verá el cumplimiento del presente teorema:

$$[T]_f[v]_f = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21-4 \\ 7+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 11 \end{bmatrix} = [T(v)]_f$$

Ejercicios propuestos de una matriz asociada a una aplicación lineal

1) Sea T un operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z) = (2y+z, x-4y, 3x)$:
   i) Hallar la matriz T en la base $\{f_1 = (1,1,1), f_2 = (1,1,0), f_3 = (1,0,0)\}$. Respuesta: $[T]_f = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$
   ii) Verificar que $[T]_f[v]_f = [T(v)]_f$ para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$ (considere el vector $v = (a,b,c)$).
2) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y sea T el operador lineal sobre R^2 definido por $T(v) = Av$ (recuerde que v es un vector columna) Hallar la matriz T en cada una de las siguientes bases:
   a. $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$. En este caso, como ve usted es la base usual. Respuesta: $[T]_e = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
   b. $\{e_1 = (1,3), e_2 = (2,5)\}$. Respuesta: $[T]_e = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

Rango de una aplicación lineal

Se va a considerar tener un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sobre un cuerpo K

$$a_{11}x + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_2 = b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_m$$

Este sistema es equivalente al sistema matricial

$$Ax = b$$

Del cual se obtiene $A = (a_{ij})$ que representa la matriz de los coeficientes y $x = (x_i)$ y $b = (b_i)$ las columnas de las incógnitas y de las constantes, respectivamente. La matriz A también puede considerarse como una aplicación lineal

$$A: K^n \to K^m$$

En este contexto, la solución de la ecuación $Ax = b$ equivale a la preimagen de $b \in K^m$ por la aplicación $A: K^n \longrightarrow K^m$. Así también la solución de la ecuación homogénea $Ax = 0$ se podría ser el núcleo de la aplicación

$$A: K^n \to K^m$$

Por tanto, se tiene que:

$$dim(Ker\ A) = dimK^n - dim(Im\ A) = n - rang\ A$$

Pero n no es otra cosa que el número de incógnitas en el sistema homogéneo $Ax = 0$, según esto se tiene el teorema,

Teorema: la dimensión del espacio solución W del sistema homogéneo de ecuaciones lineales $Ax = 0$ es $n - r$, donde n es el número de incógnitas y r es el rango de la matriz de los coeficientes de A.

Matriz de cambio de base

Definición: Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base en V y sea $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ otra base. Ahora suponer que

$$f_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n$$

$$f_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n$$

Entonces, la transpuesta de P de la matriz de los coeficientes, se llama matriz de transición de la base "primitiva" $\{e_i\}$ a la base "nueva" $\{f_i\}$:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Como los vectores $f_1, \dots, f_n$ son linealmente independientes, la matriz P es invertible y su inversa será la matriz de transición de la base $\{f_i\}$ a la base $\{e_i\}$.

Ejemplo: Se tiene dos bases en $\mathbb{R}^2$ que son:

$$\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\} \text{ y } \{f_1 = (1,1), f_2 = (-1,0)\}$$

Entonces: $$f_1 = (1,1) = (1,0) + (0,1) = e_1 + e_2$$

$$f_2 = (-1,0) = -(1,0) + 0(0,1) = -e_1 + 0e_2$$

La matriz de transición P de la base $\{e_i\}$ a la base $\{f_i\}$ es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se va a realizar el proceso inverso, de la base $\{f_i\}$ a la base $\{e_i\}$.

Para ello se tiene: $$e_1 = (1,0) = 0(1,1) - (-1,0) = 0f_1 - f_2$$

$$e_2 = (0,1) = (1,1) + (-1,0) = f_1 + f_2$$

La matriz de transición Q de la base $\{f_i\}$ a la base $\{e_i\}$ es: $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Estas dos matrices de transición P y Q son inversas, de modo que $PQ = I$,

$$PQ = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

A continuación, se verá cómo son afectados los vectores coordenados por aplicar un cambio de base.

Teorema Sea P la matriz de transición de una base $\{e_i\}$ a un base $\{f_i\}$ en un espacio vectorial V. Entonces, para todo vector $v \in V, P[v]_f = [v]_e$.

Luego: $[v]_f = P^{-1}[v]_e$

En este punto es importante notar que, aunque se diga P es la matriz de transición de la base "vieja" $\{e_i\}$ a la base "nueva" $\{f_i\}$, lo que en realidad lograr es transformar las coordinadas de un vector de la base nueva $\{f_i\}$ hacia las coordenadas en la base vieja $\{e_i\}$.

Para el caso de $\dim V = 3$, el teorema anterior se ilustra de la siguiente manera. Suponer que P es la matriz de transición de una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de V a un base $\{f_1, f_2, f_3\}$ de V; y sean también, por ejemplo:

$$f_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$f_2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

$$f_3 = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$$

Luego P, la matriz de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Considerar ahora un vector $v \in V$ y, además que, $v = k_1f_1 + k_2f_2 + k_3f_3$. Entonces al sustituir los elementos de la base nueva f_i en la ecuación anterior para v, se tiene:

$$v = k_1f_1 + k_2f_2 + k_3f_3$$

$$\begin{aligned} v = \ & k_1(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) + k_2(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \\ & + k_3(c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3) \end{aligned}$$

Multiplicando, reagrupando y extrayendo como factores comunes los elementos de la base "inicial", se tiene:

$$\begin{aligned} v = \ & (a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3)e_1 + (a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3)e_2 \\ & + (a_3k_1 + b_3k_2 + c_3k_3)e_3 \end{aligned}$$

Entonces:

$$[v]_f = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad [v]_e = \begin{bmatrix} a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 \\ a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 \\ a_3k_1 + b_3k_2 + c_3k_3 \end{bmatrix}$$

$$P[v]_f = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 \\ a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 \\ a_3k_1 + b_3k_2 + c_3k_3 \end{bmatrix} = [v]_e$$

Ahora, si se multiplica la ecuación anterior por P^{-1}, se tiene:

$$P^{-1}[v]_e = P^{-1}P[v]_f = I[v]_f = [v]_f$$

Teorema Sea P la matriz de transición de una base $\{e_i\}$ a una base $\{f_i\}$ en un espacio vectorial V. Entonces, para todo operador lineal φ sobre V, se tiene que

$$[\varphi]_f = P^{-1}[\varphi]_e P$$

Ejemplo: se φ el operador lineal sobre R^2 definido por $\varphi(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$. Las bases consideradas son $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ y $\{f_1 = (1, 1), f_2 = (-1, 0)\}$.

Entonces: $$f_1 = (1, 1) = (1, 0) + (0, 1) = e_1 + e_2$$

$$f_2 = (-1, 0) = -(1, 0) + 0(0, 1) = -e_1 + 0e_2$$

La matriz de transición P de la base $\{e_i\}$ a la base $\{f_i\}$ es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Según los datos del ejercicio aplicando el operador a la base se tiene:

$$\varphi(e_1) = \varphi(1,0) = (4,2) = 4\,e_1 + 2\,e_2$$

$$\varphi(e_2) = \varphi(0,1) = (-2,1) = -2\,e_1 + e_2$$

De esto se obtiene: $[\varphi]_e = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Ahora se calcula $[\varphi]_f$ utilizando el teorema anterior.

$$[\varphi]_f = P^{-1}[\varphi]_e P$$

$$[\varphi]_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\varphi]_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz asociada a una base ortonormal

En el capítulo 4 de este texto se estudió sobre los vectores ortogonales (4.5) y se dijo que eran aquellos que formaban entre sí un ángulo recto o, de otra forma, su producto interno era cero.

También se definió matriz ortogonal (4.5.1.) como la matriz cuadrada invertible Q para la cual $Q^{-1} = Q^T$ de tal manera que $Q^T\,Q = I$.

Definición: Base Ortogonal. Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de un subespacio V es una base ortogonal si $A\langle v_i, v_j\rangle$ es cero para todo $i \neq j$.

Definición: Base Ortonormal. Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de un subespacio V es una base ortonormal si es ortogonal y además todos sus vectores son unitarios, es decir $\|v_i\| = 1$ para todo i.

Ejemplo: Para la base $\{e_i\} = \left\{e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0;\ e_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}};\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. Representarla mediante una matriz y comprobar si es ortonormal.

Para ello definimos la Matriz Q cuyas columnas son cada uno de los elementos de la base $\{e_i\}$, es decir:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Ahora toca ver si cada uno de los elementos de la base son ortogonales entre sí, es decir forman un ángulo recto, lo cual se puede verificar si su producto interno es igual a cero, entonces:

$$\langle e_1, e_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{12}} + 0 = 0$$

$$\langle e_1, e_3\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 = 0$$

$$\langle e_2, e_3\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{2}{\sqrt{18}} = 0$$

Como los productos internos de cada par de elementos de la base es igual a cero, lo cual implica que son ortogonales, entonces la base es ortogonal. Ahora se debe constatar que cada elemento de la base tiene módulo 1, así:

$$\|e_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|e_1\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|e_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{1} = 1$$

Se ha calculado el módulo década elementos de la base y se obtuvo el valor de 1. Por lo tanto, si los elementos de la base son perpendiculares entre sí y su módulo es 1, entonces la base e es ortonormal.

Teorema: Sea $B = \{v_1, v_2 \ \dots, v_n\}$ una base ortogonal, entonces la base ortonormal será $B' = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \ \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$.

Observaciones con respecto a una base ortonormal:

(1) Se B una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, en el este libro, entre las propiedades de los determinantes (1.11. ix) se vio que el determinante de una matriz es igual al de su transpuesta, de ello resulta la propiedad

$$1 = \det(I) = \det(B^{-1}\, B) = \det(B^T\, B) = det\,(B)^2$$

(2) Por lo anterior el $\det(B)$ sólo puede vale 1 ó -1.

(3) Tomando como base la matriz identidad, la cual es la base canónica de cualquier orden, su determinante es igual a 1, si se intercambian dos elementos de la base, el valor del determinante será -1.

(4) Las bases ortonormales de valor 1 se dice que están orientadas positivamente, y las que tienen determinante -1 se dice que están orientadas negativamente, aquí se ve la importancia del orden de los elementos de la base, ya que pueden hacer cambiar la orientación del espacio.

Una pregunta que alguien puede hacer es la siguiente, ¿existen bases ortonormales, aparte de las bases canónicas?, obviamente sí. En el Ejemplo anterior se trabajó con una base diferente a la canónica en $\mathbb{R}^3$ y se comprobó que era ortonormal. Por ello es importante conocer el siguiente teorema.

Teorema: Sea V un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Entonces V tiene una base ortonormal.

En este apartado se va a obtener una base ortonormal de un subespacio utilizando el proceso de Gram-Schmidt.

Ejemplo: Utilizando el proceso de Gram-Schmidt transformar la base $\{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)\}$ del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$ a una base ortonormal $\{u_i\}$.

i. Primero se procede a normalizar $v_1 = (1,1,1,)$, para ello se calcula la norma del vector (4.2) y se divide el vector para ese valor, con ello se obtiene el primer vector u_1 de la nueva base normalizada $\{u_i\}$.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

ii. Ahora se encuentra un vector ortogonal a u_1, al que se llamará w_2:

iii. $w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = (0,1,1) - \left[(0,1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$w_2 = (0,1,1) - \left[0 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$w_2 = (0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (0,1,1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$=$$

$$w_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

iv. *Ahora* se procede a normalizar el vector hallado w_2 y con ello se obtiene el segundo vector u_2 de la base normalizada $\{u_i\}$.

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}}}$$

$$u_2 = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{6}{9}}} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{3}} =$$

$$u_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

v. *Ahora* se obtendrá el tercer vector ortogonal w_3:

$$w_3 = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_1 \rangle u_2$$

$$w_3 = (0,0,1) - \left[(0,0,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$- \left[(0,0,1)\right.$$

$$\left. \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right]\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$w_3 = (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$w_3 = (0,0,1) + \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

$$w_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

vi. *Ahora* se procede a normalizar el vector hallado w_3 y con ello se obtiene el segundo vector u_3 de la base normalizada $\{u_i\}$.

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{(0)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}}$$

$$u_3 = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{2}{4}}} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$u_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

vii. Por tanto, la base ortonormal buscada es:

$$\left\{u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), u_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), u_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

VALORES Y VECTORES PROPIOS

Introducción

En el área del algebra lineal es indispensable por su utilidad el uso de valores y vectores propios por su aplicación en varias áreas de las matemáticas como en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales, física, mecánica, ingeniería eléctrica, etc. Los valores propios se originaron en el contexto de formas cuadráticas y en el movimiento de los planetas. Los vectores propios pueden visualizarse como flechas de una cierta longitud apuntando en una dirección y sentido determinados que al ser multiplicados por un escalar no se ve afectada su dirección, es decir los vectores propios traducen la información de la matriz original en la multiplicación de valores y una constante.

El cálculo de los valores propios y de los vectores propios de una matriz simétrica tiene gran importancia en las matemáticas y en la ingeniería, entre los que cabe destacar, el problema de diagonalización de una matriz, el cálculo de los momentos de inercia y de los ejes principales de inercia de un sólido rígido, o de las frecuencias propias de oscilación de un sistema oscilante.

Definición de valores y vectores propios

Sea una matriz cuadrada $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$, decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A si existe un vector no nulo $u \in \mathbb{R}^n (u \neq 0)$ tal que $Au = \lambda u$. Es decir que $u \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de A asociado al valor propio de λ.

i) Por definición, $u = 0$ nunca es un vector propio.
ii) Por definición, un vector propio tienes asociado un solo valor propio, pero un valor propio puede tener asociado más de un vector propio.
iii) Sea $\in M_{nxn}(\mathbb{R})$, decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de $A \Leftrightarrow$ existe un vector no nulo $u \in \mathbb{R}^n (u \neq \varphi)$ tal que $Au - \lambda u = \varphi \Leftrightarrow$ existe un vector no nulo $u \in \mathbb{R}^n (u \neq 0)$ tal que $u(A - \lambda) = 0 \Leftrightarrow$ existe un vector no nulo $u \in \mathbb{R}^n (u \neq 0)$ es la solución del sistema lineal homogéneo $(A - \lambda)X = 0$ es compatible indeterminado $\Leftrightarrow |\ (A - \lambda I)| = 0$, por lo tanto, $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de $A \Leftrightarrow |(A - \lambda I)| = 0$.

Una vez hallados los valores propios, para hallar el vector propio x correspondiente al valor propio λ es necesario resolver el sistema homogéneo.

Notación de los valores y vectores propios

Sea una matriz cuadrada $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$, si λ es un valor propio de A entonces:

$$H(\lambda) = \{u \in \mathbb{R}^n / Au - \lambda u\} = \{u \in \mathbb{R}^n / (A - \lambda I)u = 0\}$$

Es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ denominado subespacio de vectores propios de A asociado en λ.

$H(\lambda)$ está formado por todos los valores propios asociados a λ y por el vector nulo (que no es vector propio).

Los vectores propios asociados a un valor propio dado en λ se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{n1}x_1 + a_{n1}x_2 + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

Donde el vector X es $X = \{x_1, x_2, \dots \dots \dots \dots x_n]$. Siempre podemos tomar x_1 como 1, y hallar las otras n-1 incógnitas. De la n ecuaciones podemos tomar n-1, y resolver el sistema lineal.

Ejemplo: Hallar el polinomio característico, los valores y vectores propios de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Solución:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -5 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = [(4 - \lambda)(-3 - \lambda) - (2)(-5)]$$

$$= -12 - 4\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 10$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 \; Polinomio\ Caracteristico$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

$$\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda + 1 = 0$$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_1 = 2, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_2 = -1, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4x & -5y \\ 2x & -3y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$$

$$2x - 5y = 0$$

$$2x = 5y$$

$$x = \frac{5y}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5y}{2} \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4x & -5y \\ 2x & -3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 5x - 5y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$5x - 5y = 0$$

$$5x = 5y$$

$$x = \frac{5y}{5} = y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}_{\to \frac{1}{2} f_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 2 & -5 \end{pmatrix}_{\to -2f1+f2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x - \frac{5}{2} y = 0$$

$$x = \frac{5}{2} y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5y}{2} \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}_{\to \frac{1}{5} f1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}_{\rightarrow -2f1+f2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x - y = 0$$

$$x = y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Hallar el polinomio característico, los valores y vectores propios de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = [(1-\lambda)(1-\lambda) - (2)(2)]$$
$$= 1 - \lambda - \lambda + \lambda^2 - 4$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 \; Polinomio\ Caracteristico$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

$$\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda + 1 = 0$$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_1 = 3, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_2 = -1, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & 2y \\ 2x & y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$-2x + 2y = 0$$

$$-2x = -2y$$

$$x = \frac{2y}{2} = y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & 2y \\ 2x & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$2x + 2y = 0$$

$$2x = -2y$$

$$x = -\frac{2y}{2} = -y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Hallar el polinomio característico, los valores y vectores propios de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Solución:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -8-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left[(2-\lambda)\left(\begin{vmatrix} -8-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}\right) + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -8-\lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right]$$

$$= (2-\lambda)[(-8-\lambda)(2-\lambda)-4] + 2[(2)(2-\lambda)-2)] + 1[4-(-8-\lambda)]$$

$$= (2-\lambda)(-16+8\lambda-2\lambda+\lambda^2-4) + 2(4-2\lambda-2) + 1(4+8+\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2+6\lambda-20) + 2(2-2\lambda) + 1(12+\lambda)$$

$$= 2\lambda^2+12\lambda-40-\lambda^3-6\lambda^2+20\lambda+4-4\lambda+12+\lambda$$

$$= p(\lambda) = -\lambda^3-4\lambda^2+29\lambda-24 \; Polinomio\ Caracteristico$$

$$-(\lambda-1)(\lambda^2+5\lambda-24) = (\lambda-1)(\lambda+8)(\lambda-3)$$

$$\lambda-1=0$$

$$\lambda+8=0$$

$$\lambda-3=0$$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_1 = 1, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_2 = -8, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_3 = 3, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y & z \\ 2x & -8y & 2z \\ x & 2y & 2z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 9y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -2x + 4y - 2z = 0 \\ 2x - 9y + 2z = 0 \\ \hline -5y \qquad = 0 \end{array}$$

Por lo tanto: $y = 0$

$$\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ \hline 2x \qquad + 2z = 0 \end{array}$$

$$2x = -2z$$

$$x = -z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -8\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y & z \\ 2x & -8y & 2z \\ x & 2y & 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8x \\ 8y \\ 8z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 10x - 2y + z = 0 \\ 2x \qquad\quad + 2z = 0 \\ x + 2y + 10z = 0 \end{cases}$$

$$2x \qquad\quad + 2z = 0$$

$$2x = -2z$$

$$x = -z$$

$$10x - 2y + z = 0$$

$$-10z - 2y + z = 0$$

$$-2y - 9z = 0$$

$$-2y = 9z$$

$$y = -\frac{9}{2}z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -\frac{9}{2}z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{9}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{9}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2x & -2y & z \\ 2x & -8y & 2z \\ x & 2y & 2z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -x - 2y + z = 0 \\ 2x - 11y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$-2x - 4y + 2z = 0$$

$$2x - 11y + 2z = 0$$

$$-15y + 4z = 0$$

$$-15y = -4z$$

$$y = \frac{4}{15}z$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$x + 2\left(\frac{4}{15}z\right) - z = 0$$

$$x + \frac{8}{15}z - z = 0$$

$$x - \frac{7}{15}z = 0$$

$$x = \frac{7}{15}z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{15}z \\ \frac{4}{15}z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} \frac{7}{15} \\ \frac{4}{15} \\ 1 \end{pmatrix} = v_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} \\ \frac{4}{15} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vectores propios por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -8-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{\to -2f_1+f_2 \\ \to -f_1+f_3}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x - 2y + z = 0$$

$$-5y \quad = 0$$

$$-5x + 10y - 5z = 0$$

$$-10y \qquad = 0$$

$$-5x \qquad\qquad -5z = 0$$

$$-5x - 5z = 0$$

$$-5x = 5z$$

$$x = -\frac{5z}{5}$$

$$x = -z$$

$$-5y = 0$$

$$y = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -8-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}_{\to f_3 \leftrightarrow f_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 2 \\ 10 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{\to -2f_1+f_2 \\ \to -10f_1+f_3}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & -4 & -18 \\ 0 & -22 & -99 \end{pmatrix}_{\to -\frac{1}{4}f_2} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} \\ 0 & -22 & -99 \end{pmatrix}_{\to 22f_2+f_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x + 2y + 10z = 0$$

$$y + \frac{9}{2}z = 0$$

$$x + 2y + 10z = 0$$

$$-2y - 9z = 0$$

$$x \qquad\qquad +z = 0$$

$$x + z = 0$$

$$x = -z$$

$$y + \frac{9}{2}z = 0$$

$$y = -\frac{9}{2}z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -\frac{9}{2}z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{9}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{9}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -8-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -11 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -11 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -11 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{\to f_3 \leftrightarrow f_1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -11 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{\substack{\to -2f_1+f_2 \\ \to f_1+f_3}} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -15 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$-15y + 4z = 0$$

$$15x + 30y - 15z = 0$$

$$-30y + 8z = 0$$

$$15x \qquad -7z = 0$$

$$15x - 7z = 0$$

$$15x = 7z$$

$$x = \frac{7}{15}z$$

$$-15y + 4z = 0$$

$$-15y = -4z$$

$$y = \frac{4}{15}z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{15}z \\ \frac{4}{15}z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} \frac{7}{15} \\ \frac{4}{15} \\ 1 \end{pmatrix} = v_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} \\ \frac{4}{15} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Hallar el polinomio característico, los valores y vectores propios de la matriz: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

Solución:

Polinomio Característico: $p(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8$

$$-(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = (\lambda + 2)(\lambda + 2)(\lambda + 2)$$

$$\lambda + 2 = 0$$

$$Valor\ propio\ es\ \lambda_1 = -2, multiplicidad\ algebraica\ 3$$

Vectores propios por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{\substack{\to -f_1+f_2 \\ \to f_1+f_3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y + 2z = 0$$

$$x = -y - 2z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Significa que el espacio vectorial es una combinación lineal de todos los vectores propios: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x + y + 2z = 0$$

$$y = -x - 2z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x - 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Igual que en el caso anterior, significa que el espacio vectorial es una combinación lineal de todos los vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x + y + 2z = 0$$

$$2z = -x - y$$

$$z = \frac{-x - y}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{-x - y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -\frac{x}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -\frac{y}{2} \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Se cumple como en el caso que le preceden, el espacio vectorial es una combinación lineal de todos los vectores propios.

Ejercicios propuestos relacionados con valores y vectores propios

Hallar el polinomio característico, los valores y vectores propios de la siguiente matriz

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Resultado

$\lambda_1 = -2 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Resultado

$\lambda_1 = 1 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Resultado

$\lambda_1 = -4 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 7 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

Resultado

$\lambda_1 = 2 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 9 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

5) $E = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

6) Resultado

$\lambda_1 = -3 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 11 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

Resultado

$\lambda_1 = -2 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

8) $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Resultado

$\lambda_1 = 3 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 8 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

9) $C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Resultado

$\lambda_1 = -5 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

10) $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

Resultado

$\lambda_1 = -1 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 7 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

11) $E = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Resultado

$\lambda_1 = 3 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 7 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

12) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Resultado

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 7$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_1$

$= 1, multiplicidad\ algebraica\ 2$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_2$

$= 7, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

13) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -1 \ \ \lambda_2 = 4$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_1$

$= -1, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_2$

$= 4, multiplicidad\ algebraica\ 2$

$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

14) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -4 \ \ \lambda_2 = 2$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_1$

$= -4, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_2$

$= 2, multiplicidad\ algebraica\ 2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$15)\, A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1 \;\; \lambda_2 = 2 \;\; \lambda_3 = 3$$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_1$

$= -1, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_2$

$= 2, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_3$

$= 3, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$16)\, A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -7 & -6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2$$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_1$

$= -1, multiplicidad\ algebraica\ 2$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_2$

$= 2, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$17)\, A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 \quad \lambda = 2$$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_1$

$= 1, multiplicidad\ algebraica\ 2$

$Valor\ propio\ es\ \lambda_2$

$= 2, multiplicidad\ algebraica\ 1$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico

Sea la matriz cuadrada $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$, los valores propios de A son las raíces del polinomio de grado n. El polinomio característico de la matriz A es:

$$p(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots\ldots p_{n-1}\lambda + p_n$$

$$p(\lambda) = \det\ |A - \lambda I|$$

La aplicación de este método no reviste dificultad, se calculan:

i. Las potencias de la matriz A y la traza de cada una de ellas,
ii. Los coeficientes p_i del polinomio característico
iii. Los valores propios o las raíces del polinomio
iv. Conocidos los valores propios se calculan los vectores propios.

Se denominan valores propios o raíces características de una matriz cuadrada A, a los valores de λ tales que.

$$p(\lambda) = \det\ |A - \lambda I|$$

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Donde I representa a la matriz identidad, cuyos elementos son ceros, excepto de la diagonal principal que son unos. El número de veces que aparece λ_i como solución de la ecuación característica recibe el nombre de multiplicidad algebraica del valor propio y lo denominamos por m_i.

Desarrollando el determinante tenemos un polinomio en λ de grado n. Las raíces del polinomio (valores propios) pueden ser distintas o repetidas. Para calcular los vectores propios tenemos que resolver el sistema homogéneo $(A - \lambda I)X = 0$, para cada una de las raíces: λ_1, λ_2.....λ_n.

Desarrollando el determinante tenemos un polinomio de grado n en λ. Trataremos de encontrar los coeficientes del polinomio y luego, aplicaremos un método de hallar las raíces del polinomio.

Matriz simétrica

Una matriz simétrica es una matriz cuadrada cuya transpuesta es igual a la propia matriz.

$$A = A^T$$

Donde A^T representa la matriz transpuesta de A

Reconocer la estructura de una matriz simétrica es muy sencillo: el elemento de la fila i y la columna j tiene que ser idéntico al elemento

de la fila j y columna i. Y los valores de la diagonal principal de la matriz pueden ser cualquiera.

Ejemplos de matriz simétrica:

Ejemplo de matriz simétrica de orden $2x2$: $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

Ejemplo de matriz simétrica de orden $3x3$: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ejemplo de matriz simétrica de orden $4x4$: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 9 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 8 & 4 \\ 9 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Al transponer estas tres matrices se comprueba que son simétricas, porque las matrices traspuestas son equivalentes a sus respectivas matrices originales.

Nota: Para reconocer que una matriz es simétrica, podemos observar los ejemplos anteriores, donde la diagonal principal de una matriz simétrica es un eje de simetría o, dicho de otra forma, actúa como un espejo entre los números por encima de la diagonal y los de debajo. Por esta razón este tipo de matrices reciben el nombre de simétricas.

Propiedades de las matrices simétricas

Las características de las matrices simétricas son las siguientes:

i) La suma (o resta) de dos matrices simétricas da como resultado otra matriz simétrica. Ya que la transposición dos matrices sumadas (o restadas) es equivalente a transponer cada matriz por separado:

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$$

ii) Cualquier matriz simétrica multiplicada por un escalar también da lugar a otra matriz simétrica.

iii) Del mismo modo, el producto matricial entre dos matrices simétricas no siempre es igual a otra matriz simétrica, tan solo si, y solo si, las dos matrices se pueden conmutar. Esta condición se puede demostrar con la propiedad de la multiplicación de la matriz traspuesta:

$$(A * B)^T = A^T * B^T = BA = AB$$

iv) La potencia de una matriz simétrica da lugar a otra matriz simétrica, siempre y cuando el exponente sea un número entero.

v) Evidentemente, la matriz Unidad y la matriz Nula son ejemplos de matrices simétricas.

vi) Una matriz que es congruente con una matriz simétrica debe ser también simétrica.

vii) Si una matriz simétrica es regular o invertible, entonces su matriz inversa también es simétrica.

viii) Lo mismo sucede con la adjunta de una matriz simétrica: la matriz adjunta de una matriz simétrica da como solución otra matriz simétrica.

ix) Una matriz simétrica real es a la vez una matriz normal.

x) Como las matrices simétricas son un caso particular de las matrices Hermitianas, todos los valores propios de una matriz simétrica son números reales.

xi) El teorema espectral nos dice que todas las matrices cuyos elementos sean reales son matrices diagonalizables y, además, la diagonalización se realiza mediante una matriz ortogonal. Por lo tanto, todas las matrices simétricas reales se diagonalizan ortogonalmente.

xii) Por otro lado, las matrices simétricas con números complejos se pueden diagonalizar a través de una matriz unitaria.

xiii) La matriz Hessiana siempre es simétrica.

xiv) La inversa de una matriz simétrica regular es simétrica.

xv) La matriz adjunta de una matriz simétrica es también simétrica.

xvi) La suma de matrices simétricas es una matriz simétrica. El producto lo es si, y sólo si, también es conmutativo.

xvii) Los valores propios de una matriz cuadrada, real y simétrica son reales.

xviii) Los vectores propios de los valores propios distintos de una matriz cuadrada y real son ortogonales.

xix) Una matriz cuadrada y real, A, es simétrica si, y sólo si, es diagonalizable mediante una matriz de paso ortogonal, P. Es decir, $PAP^{-1} = D =$ Diagonal.

Diagonalización de matrices

Sea A una matriz cuadrada, $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$, decimos A es diagonalizable si existe una matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix}$ y existe una matriz regular, $P \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ con $|P| \neq 0$, tal que $A = PDP^{-1}$.La matriz P recibe el nombre de matriz de paso y la matriz D se llama matriz diagonal semejante a A.

Teorema: Sea A una matriz cuadrada, $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$, los $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son valores propios con multiplicidades algebraicas respectivas $m_1, m_2, \dots, m_n$, la matriz A es diagonalizable si y sólo si $dimH(\lambda_i) = m_i$ $\forall i = 1,2, \dots n$.

Si un valor propio λ_i es simple, es decir tiene multiplicidad algebraica 1, se verifica que $dimH(\lambda_i) = 1$. Por lo tanto, para saber si una matriz es diagonalizable sólo hay que analizar los valores propios. Si todos los valores propios de una matriz son simples entonces la matriz es diagonalizable. Como:

$\dim \mathbb{R}^n$

$= dimH(\lambda_i)$

$+ \textit{número de ecuaciones implícitas linealmente independiente}.$

i. Las matrices simétricas son siempre diagonalizables.
ii. Una matriz A es diagonalizable si existe una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que $A = PDP^{-1}$

Ejemplo: Dada la matriz A, resolver si es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: Se calculan los valores propios y su multiplicidad algebraica resolviendo la ecuación:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda) - 6] = 0$$

$$(4-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = \begin{cases} 4-\lambda \\ \lambda^2 - 3\lambda - 4 \begin{cases} \lambda - 4 \\ \lambda + 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$4 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4$$

$$\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_2 = 4$$

$$\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_3 = -1$$

Valor propio es $\lambda_1 = 1$, multiplicidad algebraica 1

Valor propio es $\lambda_2 = 4$, multiplicidad algebraica 2

La matriz diagonal está formada por los valores propios: $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Calcular los vectores propios: $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4x & -y & z \\ 0 & y & 3z \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$2y + 3z = 0$$

$$2y = -3z$$

$$y = -\frac{3z}{2}$$

$$5x - y + z = 0$$

$$5x - \left(-\frac{3z}{2}\right) + z = 0$$

$$5x + \frac{3z}{2} + z = 0$$

$$5x + \frac{5z}{2} = 0$$

$$5x = -\frac{5z}{2}$$

$$x = -\frac{z}{2}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{z}{2} \\ -\frac{3z}{2} \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4x & -y & z \\ 0 & y & 3z \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -y+z=0 \\ -3y+3z=0 \\ 2y-2z=0 \end{cases}$$

$$-y+z=0$$

$$-y=-z$$

$$y=z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Dada la matriz A, resolver si es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: Se calculan los valores propios y su multiplicidad algebraica resolviendo la ecuación:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)[(3-\lambda)(3-\lambda) - 1] = 0$$

$$(4-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = \begin{cases} 2-\lambda \\ \lambda^2 - 6\lambda + 8 \begin{cases} \lambda - 2 \\ \lambda - 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 4$$

Valor propio es $\lambda_1 = 2$, multiplicidad algebraica 2

Valor propio es $\lambda_2 = 4$, multiplicidad algebraica 1

La matriz diagonal está formada por los valores propios: $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Calcular los vectores propios:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3x & -y & z \\ 0 & 2y & 0 \\ x & -y & 3z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 - 0 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$x - y + z = 0$$

$$x = y - z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3x & -y & z \\ 0 & 2y & 0 \\ x & -y & 3z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 4z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y - 0 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$y = 0$$

$$-x - y + z = 0$$

$$-x - 0 + z = 0$$

$$-x = -z$$

$$x = z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Introducción

La geometría analítica se encarga del estudio de formas geométricas haciendo uso de herramientas básicas del análisis matemático y del algebra lineal en un determinado sistema de referencia, lo que permite representar las figuras geométricas mediante expresiones algebraicas como el de: $f(x)$, el estudio de la geometría analítica se basa en los sistemas cartesianos para poder establecer ecuaciones o inecuaciones para identificar las figuras geométricas, es decir, permite relacionar el álgebra, la geometría y el sistema coordenado cartesiano que permitió aportes en el proceso del sistema de posicionamiento global (GPS).

Definición de espacio afín

Un espacio vectorial afín es un espacio Vectorial (V): si $P, Q \in V$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

Donde P es el origen y Q el extremo del vector $\overrightarrow{PQ} = Q - P$. Los elementos del espacio afín los llamaremos puntos. La dimensión de V es la dimensión del espacio vectorial.

Propiedades del espacios afín

La operación afín cumple con las siguientes propiedades:

i. $Q = P + \overrightarrow{PQ}$
ii. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

iii. Si $P \in V$ y $v \in V$, existe un único punto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = v$

iv. $\overrightarrow{PQ} = 0$ si y solo si $P = Q$

v. $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

vi. Si $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$ entonces $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{QB}$

Definición: Un subespacio afín o también llamado variedad lineal de un espacio afín es un conjunto S de la forma $S = P + U$, donde P es un punto y U es un subespacio vectorial:

$$P + U = \{P + u; u \in U\}$$

Al subespacio U se llama variedad de dirección o subespacio vectorial asociado de S. También se denota por $\vec{S}$. Se llama dimensión de S, a la dimensión de U.

Como consecuencia,

$$\vec{S} = \{\overrightarrow{PQ}; Q \in S\}$$

Proposición: Son equivalentes los siguientes enunciados:

a) S es un subespacio afín.
b) Si $P \in S$, el conjunto $\{\overrightarrow{PQ}; Q \in S\}$ es un subespacio vectorial.
c) El conjunto $= \{\overrightarrow{PQ}; P, Q \in S\}$ es un subespacio vectorial.

7.1. Rectas en el plano afín

Si p y Q son dos puntos distintos de un espacio afín, se llama recta que pasa por P y Q al subespacio.

$$\langle P, Q\rangle = P + \langle \overrightarrow{PQ}\rangle = \{P + \lambda\overrightarrow{PQ}; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Proposición: En un espacio afín se tiene las siguientes propiedades:

i. $P, Q \in \langle P, Q\rangle$
ii. $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$
iii. La recta que pasa por dos puntos es un subespacio afín de dimensión 1. Además, es el único subespacio afín de dimensión 1 que pasa por ellos.
iv. Si $R \in \langle P, Q\rangle$ es otro punto, entonces $\langle P, R\rangle = \langle P, Q\rangle$
v. Si $A, B, C \in \langle P, Q\rangle$, entonces $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ son linealmente independientes.

Ecuaciones paramétricas de la recta

La ecuación de la recta R se reduce como variedad lineal que es, sumando su espacio vectorial director $\vec{F}$ de dimensión 1 con uno de sus puntos $D(d_1, d_2, d_3) \in R$

$$R/\vec{F} + D$$

Sea $\vec{F} = \{\lambda\vec{v}/\lambda \in R\}$ siendo $\vec{v} \in \vec{F}$ un vector no nulo de componentes $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2} + v_3\overrightarrow{e_3}$

Cualquier punto $X = (x_1, x_2, x_3)$ de la recta R debe verificar la ecuación paramétrica vectorial $X = \lambda\vec{v} + D$

$X = (x_1, x_2, x_3) = \lambda(v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2} + v_3\overrightarrow{e_3}) + d_1, d_2, d_3 = (\lambda v_1 + d_1, \lambda v_2 + d_2, \lambda v_3 + d_3)$ para $\lambda \in R$

Igualando ambos miembros resulta:

$$R/\begin{cases} x_1 = \lambda v_1 + d_1 \\ x_2 = \lambda v_2 + d_2 \\ x_3 = \lambda v_3 + d_3 \end{cases}$$

Ecuaciones canónicas o en forma continua de la recta

Despejando λ en las ecuaciones, resulta

$$\lambda = \frac{x_1 - d_1}{v_1} = \frac{x_2 - d_2}{v_2} = \frac{x_3 - d_3}{v_3}$$

$$R/\frac{x_1 - d_1}{v_1} = \frac{x_2 - d_2}{v_2} = \frac{x_3 - d_3}{v_3}$$

Los números v_1, v_2, v_3 se llaman coeficientes directores de la recta.

La recta R se determina conociendo dos puntos $D(d_1, d_2, d_3)$ y $A(a_1, a_2, a_3)$, entre le vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = D\vec{A} = (a_1 - d_1, a_2 - d_2, a_3 - d_3)$ es un vector director de la recta R, cuya ecuación canónica o en forma continua es.

$$R/\frac{x_1 - d_1}{a_1 - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{a_2 - d_2} = \frac{x_3 - d_3}{a_3 - d_3}$$

Ecuaciones afines de la recta

Las ecuaciones paramétricas de la recta R que pasa por los puntos $D(d_1, d_2, d_3)$ y $A(a_1, a_2, a_3)$ son:

$R/$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda(a_1 - d_1) + d_1 = \lambda a_1 - \lambda d_1 + d_1 = \lambda a_1 + (d_1 - \lambda d_1) = \lambda a_1 + d_1(1 - \lambda) \\ x_2 = \lambda(a_2 - d_2) + d_2 = \lambda a_2 - \lambda d_2 + d_2 = \lambda a_2 + (d_2 - \lambda d_2) = \lambda a_2 + d_2(1 - \lambda \\ x_3 = \lambda(a_3 - d_3) + d_3 = \lambda a_3 - \lambda d_3 + d_3 = \lambda a_3 + (d_3 - \lambda d_3) = \lambda a_3 + d_3(1 - \lambda) \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

Si se hacen $\mu_1 = 1 - \lambda$ y $\mu_2 = \lambda$, resultan las denominadas Ecuaciones afines de la Recta R.

$$R/\begin{cases} x_1 = \mu_2 a_1 + \mu_1 d_1 \\ x_2 = \mu_2 a_2 + \mu_1 d_2 \\ x_3 = \mu_2 a_3 + \mu_1 d_3 \\ 1 = \mu_1 + \mu_2 \end{cases} \qquad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

Ecuación en forma implícita de la recta

Las ecuaciones paramétricas de la recta R se escriben en forma de matrices

$$\begin{pmatrix} x_1 - d_1 \\ x_2 - d_2 \\ x_3 - d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \lambda$$

Entonces

$$R/\begin{cases} v_2 x_1 - v_2 d_1 - v_1 x_2 + v_1 d_2 = 0 \\ v_3 x_1 - v_3 d_1 - v_1 x_3 + v_1 d_3 = 0 \end{cases}$$

Donde

$$Rango\begin{pmatrix} x_1 - d_1 \\ x_2 - d_2 \\ x_3 - d_3 \end{pmatrix} = 1$$

Esto significa que los menores de segundo orden se pueden formar son todos nulos

$$\begin{vmatrix} x_1 - d_1 & v_1 \\ x_2 - d_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x_1 - d_1 & v_1 \\ x_3 - d_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Se resuelven ambas determinantes

$$R/\begin{cases} v_2(x_1 - d_1) - v_1(x_2 - d_2) = 0 \\ v_3(x_1 - d_1) - v_1(x_3 - d_3) = 0 \end{cases}$$

$$R/\begin{cases} v_2x_1 - v_2d_1 - v_1x_2 + v_1d_2 = 0 \\ v_3x_1 - v_3d_1 - v_1x_3 + v_1d_3 = 0 \end{cases}$$

Se obtienen las ecuaciones implícitas de la recta R

Planos en el espacio afín

La ecuación de un plano π se deduce como la variedad lineal que es, sumando su espacio vectorial director $\vec{F}$ de dimensión 2 con uno de sus puntos $D(d_1, d_2, d_3) \in \pi$.

$$\pi/\vec{F} + D$$

Ecuaciones paramétricas del plano

Sea $\vec{F} = \{\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}/\lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ siendo $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{F}$ dos vectores no nulos de componentes.

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2} + v_3\overrightarrow{e_3}$$

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = w_1\overrightarrow{e_1} + w_2\overrightarrow{e_2} + w_3\overrightarrow{e_3}$$

Cualquier punto $X = (x_1, x_2, x_3)$ del plano π debe verificar la ecuación paramétrica vectorial $X = (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) + D$

$$\begin{aligned} X = (x_1, x_2, x_3) \\ &= \lambda(v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2} + v_3\overrightarrow{e_3}) + \mu(w_1\overrightarrow{e_1} + w_2\overrightarrow{e_2} + w_3\overrightarrow{e_3}) \\ &+ (d_1, d_2, d_3) \end{aligned}$$

$X = (x_1, x_2, x_3) = (\lambda v_1 + \mu w_1 + d_1, \lambda v_2 + \mu w_2 + d_2, \lambda v_3 + \mu w_3 + d_3)$
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Igualando ambos miembros resulta

$$\pi / \begin{cases} x_1 = \lambda v_1 + \mu w_1 + d_1 \\ x_2 = \lambda v_2 + \mu w_2 + d_2 \\ x_3 = \lambda v_3 + \mu w_3 + d_3 \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Las ecuaciones se pueden escribir así

$$\pi/\begin{cases} x_1 - d_1 = \lambda v_1 + \mu w_1 \\ x_2 - d_2 = \lambda v_2 + \mu w_2 \\ x_3 - d_3 = \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ecuación implícita o general del plano

Las ecuaciones paramétricas del plano π se escriben en forma de matrices

$$\begin{pmatrix} x_1 - d_1 \\ x_2 - d_2 \\ x_3 - d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \mu$$

Con los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes.

$$Rango \begin{pmatrix} x_1 - d_1 & v_1 & w_1 \\ x_2 - d_2 & v_2 & w_2 \\ x_3 - d_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 2$$

Esto equivale a que su determinante sea nulo

$$\begin{vmatrix} x_1 - d_1 & v_1 & w_1 \\ x_2 - d_2 & v_2 & w_2 \\ x_3 - d_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante y estudiando el tipo de términos que lo forman, resulta la Ecuación implícita o general del plano π

$$\pi/Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$$

Cuando se resuelve el determinante es evidente que al reducir términos semejantes existe un conjunto de ellos multiplicados por x_1 expresados con la notación A, un segundo conjunto multiplicado por x_2 expresado por B, un tercer conjunto multiplicado por x_3 notado por C y finalmente un cuarto conjunto de términos independientes por D. Entonces $\vec{F}$ es el conjunto de vectores cuyas componentes x_1, x_2, x_3 satisface la ecuación $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$

En el caso particular para los vectores $\vec{v}\ y\ \vec{w}$

$$\begin{cases} Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0 \\ Aw_1 + Bw_2 + Cw_3 = 0 \end{cases}$$

Ecuación del plano que pasa por tres puntos no alineados

En el plano π queda definido cuando se conocen tres puntos de sus puntos: $D(d_1, d_2, d_3)$, $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$, de forma que los vectores $D\vec{A}$ y $D\vec{B}$ formen una de $\mathbb{R}^3$.

Se realizan las sustituciones:

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = D\vec{A} = (a_1 - d_1, a_2 - d_2, a_3 - d_3)$$

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = D\vec{B} = (b_1 - d_1, b_2 - d_2, b_3 - d_3)$$

$$\pi / \begin{vmatrix} x_1 - d_1 & a_1 - d_1 & b_1 - d_1 \\ x_2 - d_2 & a_2 - d_2 & b_2 - d_2 \\ x_3 - d_3 & a_3 - d_3 & b_3 - d_3 \end{vmatrix} = 0$$

En el apartado anterior de la ecuación de una recta se debe considerar que dos planos no paralelos definen una recta R que es su linea de intersección.

Sean las ecuaciones de estos dos planos

$$A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1 = 0 \text{ y } A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2 = 0$$

Ambas ecuaciones consideradas conjuntamente

$$R/\begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1 = 0 \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2 = 0 \end{cases}$$

Se denominan Ecuaciones Generales de la Recta R

A partir de estas ecuaciones generales dadas, es posible obtener las ecuaciones canónicas o en forma continua. Para ello basta con conocer un punto de la recta D y su vector $\vec{v}$.

Las coordenadas de un punto de la recta se obtienen resolviendo el sistema

$$\pi/\begin{vmatrix} x_1 - d_1 & a_1 - d_1 & b_1 - d_1 \\ x_2 - d_2 & a_2 - d_2 & b_2 - d_2 \\ x_3 - d_3 & a_3 - d_3 & b_3 - d_3 \end{vmatrix} = 0$$

Se elige la incógnita que pasa al segundo miembro y se calculan las otras dos en función de ella.

El vector director $\vec{r}$ de la recta R tiene que ser perpendicular a los vectores directores de ambos planos $\overrightarrow{V_1} = (A_1, B_1, C_1)$ y $\overrightarrow{V_2} = (A_2, B_2, C_2)$ ambos normales a los planos que definen la recta R, entonces el vector $\vec{r} = \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$.

Plano determinado por sus intersecciones con los ejes de referencia (ecuación canónica del plano)

La ecuación del plano π que pasa por los puntos $A(a, 0,0), B(0, b, 0), C(0,0, c)$ se obtiene sustituyendo estos valores en la ecuación.

$$\pi / \begin{vmatrix} x_1 - a & -a & -a \\ x_2 & b & 0 \\ x_3 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1 - a)bc + abx_3 + acx_2 = 0 \quad , \quad bcx_1 - abc + acx_2 = 0$$

$bcx_1 + acx_2 + abx_3 = abc$, dividiendo para abc, a cada uno de los miembros de la ecuación se obtiene:

$$\frac{bcx_1 + acx_2 + abx_3}{abc} = 1$$

$$\pi / \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1$$

Ecuaciones afines del plano

Las ecuaciones paramétricas del plano $\prod$ que pasa por los puntos $D(d_1, d_2, d_3)$, $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ son:

$$R/\begin{cases} x_1 = \lambda(a_1 - d_1) + \mu(b_1 - d_1) + d_1 = (1 - \lambda - \mu)d_1 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 = \lambda(a_2 - d_2) + \mu(b_2 - d_2) + d_2 = (1 - \lambda - \mu)d_2 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ x_3 = \lambda(a_3 - d_3) + \mu(b_3 - d_3) + d_3 = (1 - \lambda - \mu)d_3 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{cases}$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Si se hace $\mu_1 = 1 - \lambda - \mu$, $\mu_2 = \lambda$, $\mu_3 = \mu$, resulta las denominadas Ecuaciones Afines del Plano π

$$R/\begin{cases} x_1 = \mu_1 d_1 + \mu_2 a_1 + \mu_3 b_1 \\ x_2 = \mu_1 d_2 + \mu_2 a_2 + \mu_3 b_2 \\ x_3 = \mu_1 d_3 + \mu_2 a_3 + \mu_3 b_3 \end{cases} \qquad \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$$

La interpretación de estas ecuaciones es que el vector $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, 1)$ es combinación lineal de los vectores:

$D\vec{A} = (a_1 - d_1, a_2 - d_2, a_3 - d_3, 1)$ y $D\vec{B} = (b_1 - d_1, b_2 - d_2, b_3 - d_3, 1)$

$$\pi/\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sistemas de referencia

Un sistema de referencia afín en un espacio afín es un par de la forma (O, B), donde O es un punto de V y B es una base de V. Al punto O se llama origen y a los elementos de la base, ejes del sistema de referencia.

En $\mathbb{R}^n$, si O es el elemento neutro y B es la base usual, el sistema de referencia determinado se llama el sistema de referencia afín usual.

Si $\langle O, B\rangle$ es un sistema de referencia afín, los puntos $\{P_0 \dots . P_n\}$, donde $P_0 = O$ y $P_i = O + e_i$, son afínmente independientes. Recíprocamente, si $\{P_0 \dots . P_n\}$ son $n + 1$ puntos afínmente independientes de un espacio afín de dimensión n, entonces (P_0, B), donde $B = \{\overrightarrow{P_0P_i}; 1 \leq i \leq n\}$, es un sistema de referencia afín.

Si P es un punto de V, se llama coordenadas afines respecto del sistema de referencia afín a los únicos números x_i tales que

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Lo que es lo mismo,

$$P = O + \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Si S es un subespacio afín de dimensión $n - m$ de $\mathbb{R}^n$ y $R = (O, B = \{e_i\})$ es un sistema de referencia afín, se llama coordenadas

cartesianas de S respecto de R a m ecuaciones lineales linealmente independiente tales que

$$S = \{O + x_i e_i + \ldots + x_n e_n; Ax = b\}$$

Donde $A \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ tiene rango m y $b \in \mathbb{R}^m$. Estudiamos como cambian las ecuaciones cartesianas al cambiar el sistema de referencia. Sea $R' = \left(O', B = \{e_i'\}\right)$ otro sistema de referencia y $P \in V$. Entonces

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

Si $\overrightarrow{OO'} = \sum_i d_i e_i$ y $P = M(1_V, B', B)$ es la correspondiente matriz de cambio de base, entonces $x = Px'$. Por lo tanto $x = d + Px'$ y $Ax = Ad + APx'$.

Sustituyendo en $Ax = b$ se tiene que las coordenadas de S respecto de R' son

$$S = \{O' + x_1 e_1 + \cdots\ x_n e'_n; APx' = b - Ad\}$$

Definición: Sea $\mathfrak{R} = (O; B)$, un sistema de referencia de un espacio afín E asociado a un espacio vectorial V. Se denominan coordenadas cartesianas de $X \in E$, a las coordenadas del vector $\overrightarrow{OX}$ respecto a la base B.

Sea: $\overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{V}_i$, entonces, las coordenadas del vector son: $\left(\overrightarrow{OX}\right)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, por lo tanto las coordenadas del punto X respecto al sistema de de referencia $\mathfrak{R}$, será representada por: $[X]_{\mathfrak{R}=} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$.

Ejemplo: Sea el espacio afín $\mathfrak{R}^2$, sobre el espacio afín vectorial $\mathfrak{R}^2$ y $\mathfrak{R} = (O; B)$, un sistema de referencia de $\mathfrak{R}^3$, donde $O = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ y $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. Determinar las coordenadas del punto $P = \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix}$ respecto a $\mathfrak{R}$.

Solución:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{O} = \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Como: $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = \boldsymbol{x_1}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{x_2}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}}$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{x_2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{-5} \end{cases}$$

Entonces: $[P]_{\mathfrak{R}} = \begin{vmatrix} -2 \\ -5 \end{vmatrix}$

Representando de forma gráfica, se puede apreciar que el punto P es fijo en el espacio afín, pero las coordenadas del punto P en el sistema de referencia canónico son diferentes al sistema de referencia $\mathfrak{R}$.

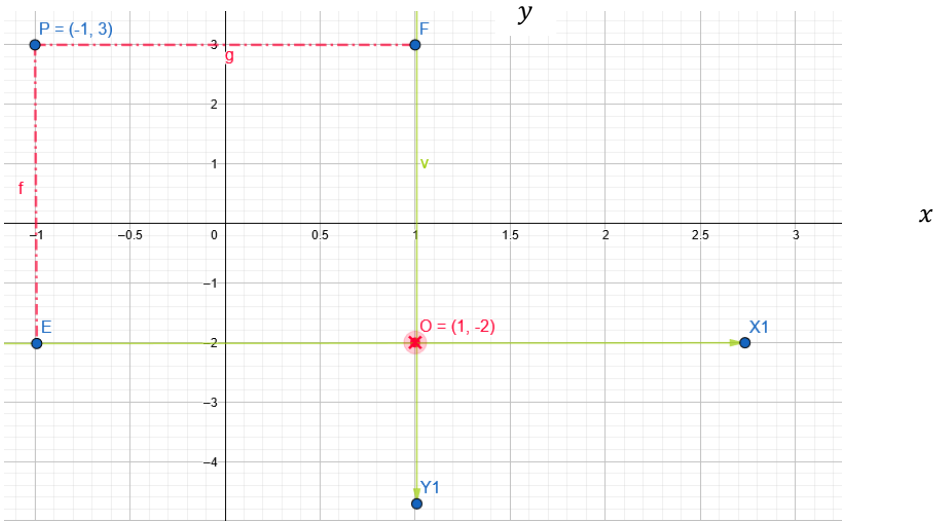

Figura No. 1 *Punto en sistemas de referencia*

Ejemplo: Sea el espacio afín $\mathfrak{R}^3$, sobre el espacio afín vectorial $\mathfrak{R}^3$ y $\mathfrak{R} = (O; B)$, un sistema de referencia de $\mathfrak{R}^3$, donde $O = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Determinar las coordenadas del punto $P = \begin{vmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{vmatrix}$ respecto a $\mathfrak{R}$.

Solución:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{O} = \begin{vmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como: $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}} = \boldsymbol{x_1}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{x_2}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{x_3}\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{3}}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{x_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{x_3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{1} \end{cases}$$

Entonces: $[P]_{\Re} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$

Rectas en sistemas de referencia

Sea $\Re = (O; B)$, un sistema de referencia de un espacio afín E asociado a un espacio vectorial V de dimensión n. $X = P + W$, es una recta de $[P]_{\Re} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$ y $W =< \{V\} >$, con $\left[\vec{V}\right]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Si $X \in P + W \Rightarrow X = P + P\vec{X}$, donde $P\vec{X} \in W$.

Como: $\overrightarrow{ox} = \overrightarrow{op} + p\vec{x} \Rightarrow \overrightarrow{ox} = \overrightarrow{op} + t\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = p_1 + ta_1 \\ x_2 = p_2 + ta_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = p_n + ta_n \end{cases}$

Donde $o\vec{x}$ es la ecuación paramétrica de la recta L que pasa por el punto P y con dirección del vector v en el sistema de referencia $\Re$, la cual se puede escribir como:

$$[X]_{\Re} = [P]_{\Re} + t.\left[\vec{V}\right]_B$$

Ejemplo: Sea el sistema de referencia $\Re = \left\{ O' = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} ; B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}$ en el espacio afín $\Re^3$. Dada la recta L que pasa por los puntos $P = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ y $Q = \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix}$, con dirección desde P hasta Q. Determinar la ecuación de la recta L en el sistema de referencia $\Re$.

Solución:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P} = \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_L = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{x_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{x_3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 2} \\ \boldsymbol{x_2 = -1} \\ \boldsymbol{x_3 = 3} \end{cases}$$

La dirección de la recta L en el sistema de referencia $\Re$ es igual a: $[\vec{v}_L]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{O'P}} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{O'} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{x_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{x_3}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 2} \\ \boldsymbol{x_2 = -1} \\ \boldsymbol{x_3 = 2} \end{cases}$$

$$\left[\overrightarrow{O'P}\right]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta L, en el sistema de referencia $\mathfrak{R}$ es igual a:

$$L: \begin{cases} x' = 2 + 2t \\ y' = -1 - t \\ x' = 2 + 3t \end{cases}$$

Planos en sistemas de referencia

Sea $\mathfrak{R} = (O; B)$, un sistema de referencia de un espacio afín E asociado a un espacio vectorial V de dimensión n y $\pi: P + W$, es un plano de E, donde $[P]_{\mathfrak{R}} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$ y $W =< \{u, v\} >$, con $[\vec{u}]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $[\vec{v}]_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Si $X \in P + W \Rightarrow X = P + P\vec{X}$, donde $P\vec{X} \in W$.

Como: $\overrightarrow{ox} = \overrightarrow{op} + p\vec{x} \Rightarrow \overrightarrow{ox} = \overrightarrow{op} + s\vec{u} + t\vec{v} \Rightarrow \pi: \begin{cases} x_1 = p_1 + sa_1 + tb_1 \\ x_2 = p_2 + sa_2 + tb_2 \\ \vdots \\ x_n = p_n + sa_n + tb_n \end{cases}$

Donde π es la ecuación paramétrica del plano que pasa por el punto P y con dirección $=< \{u, v\} >$ en el sistema de referencia $\mathfrak{R}$, la cual se puede escribir como:

$$[X]_{\mathfrak{R}} = [P]_{\mathfrak{R}} + s.[\vec{u}]_B + t.[\vec{v}]_B$$

Ejemplo: Sea el sistema de referencia $\mathfrak{R} = \left\{ O' = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} ; B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}$ en el espacio afín $\mathfrak{R}^3$. Dada el plano π que pasa por los puntos $P = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$, $Q = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix}$ y $R = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ con dirección desde P hasta Q. Determinar la ecuación del plano π en el sistema de referencia $\mathfrak{R}$.

Solución: Se debe empezar encontrando las direcciones u y v del plano π, para esto:

$$\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\boldsymbol{QP}} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\boldsymbol{QR}} = \left|\begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix}\right. - \left|\begin{matrix}0\\3\\-1\end{matrix}\right. = \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$$

Después encontrar las coordenadas de un vector $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_{2,}}, \boldsymbol{x_3})$, respecto a la base B:

$$\left\langle\begin{matrix}1 & 1 & -1\\1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{x_1}\\\boldsymbol{x_{2,}}\\\boldsymbol{x_3}\end{matrix}\right\rangle_{\substack{F_1=F_1-F_3\\F_2=F_2-F_3}} = \left\langle\begin{matrix}0 & 1 & -1\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_3}\\\boldsymbol{x_{2,}}-\boldsymbol{x_3}\\\boldsymbol{x_3}\end{matrix}\right\rangle_{\substack{F_2=F_2+F_1\\F_1=-F_1}}$$

$$= \left\langle\begin{matrix}0 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_3}\\\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_{2,}}-\boldsymbol{2x_3}\\\boldsymbol{x_3}\end{matrix}\right\rangle_{F_1=F_1+F_2}$$

$$= \left\langle\begin{matrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_3}\\\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_{2,}}-\boldsymbol{2x_3}\\\boldsymbol{x_3}\end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{matrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\boldsymbol{x_3}\\\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_{2,}}-\boldsymbol{2x_3}\\\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_3}\end{matrix}\right\rangle$$

Como: $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow [u]_B = \begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} \Rightarrow [u]_B = \begin{pmatrix}2\\-8\\-5\end{pmatrix}$

Además: $\overrightarrow{O'R} = \left|\begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix}\right. - \left|\begin{matrix}2\\3\\-1\end{matrix}\right. = \begin{pmatrix}-3\\-3\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\overrightarrow{O'R}\right]_B = \begin{pmatrix}2\\-10\\-5\end{pmatrix}$

Por lo tanto, la ecuación del plano π en el sistema de referencia $\mathfrak{R}$ es:

$$\pi: \begin{cases} x' = 2 + 2s + 2t \\ y' = -10 - 4s - 8t \\ x' = -5 - 3s - 5t \end{cases}$$

Cambio de sistemas de referencia

Sea un espacio afín E asociado a un espacio vectorial V, con $\dim(v) = n$, y sean los sistemas de referencia de E: $\Re_1 = (P = O'; B_1)$ y $\Re_2 = (Q = O''; B_2)$. Obteniendo:

$$[X]_{\Re_1} = [Q]_{\Re_1} + [Id]_{B_1}^{B_2}[X]_{\Re_2} \text{ y } [X]_{\Re_2} = [P]_{\Re_2} + [Id]_{B_2}^{B_1}[X]_{\Re_1}$$

Donde: $[Id]$ es la matriz de cambio de base.

Demostración:

Como: $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PQ'} + \overrightarrow{QX} \Rightarrow \left[\overrightarrow{PX}\right]_{B_1} = \left[\overrightarrow{PQ}\right]_{B_1} + \left[\overrightarrow{QX}\right]_{B_1}$

$$\left[\overrightarrow{PX}\right]_{B_1} = \left[\overrightarrow{PQ}\right]_{B_1} + [Id]_{B_1}^{B_2}\left[\overrightarrow{QX}\right]_{B_2}$$

Que puede ser escrito como: $[X]_{\Re_1} = [Q]_{\Re_1} + [Id]_{B_1}^{B_2}[X]_{\Re_2}$

También se puede obtener la siguiente relación:

$$\overrightarrow{QX} = \overrightarrow{QP'} + \overrightarrow{QX} \Rightarrow \left[\overrightarrow{PX}\right]_{B_2} = \left[\overrightarrow{QP}\right]_{B_2} + \left[\overrightarrow{PX}\right]_{B_2}$$

$$\left[\overrightarrow{QX}\right]_{B_2} = \left[\overrightarrow{QP}\right]_{B_2} + [Id]_{B_2}^{B_1}\left[\overrightarrow{PX}\right]_{B_2}$$

Que puede ser escrito como: $[X]_{\Re_2} = [P]_{\Re_2} + [Id]_{B_2}^{B_1}[X]_{\Re_1}$

Ejemplo: Sean los sistemas de referencia: $\Re_1 = \left(P = \left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.; B_1 = \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$ y $\Re_2 = \left(Q = \left|\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}\right.; B_2 = \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\right)$ en el espacio $\Re^2$. Determinar $[X]_{\Re_2}$, si se conoce que $[X]_{\Re_1} = \left|\begin{matrix}1\\-3\end{matrix}\right.$.

Solución: Debemos encontrar las coordenadas de un vector en B_2

$$\left(\begin{matrix}-1 & 1\\1 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right)_{F_2=F_2+F_1} = \left(\begin{matrix}-1 & 1\\0 & 2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}a\\a+b\end{matrix}\right)_{\substack{F_1=-F_1\\F_2=\frac{1}{2}F_2}} = \left(\begin{matrix}1 & -1\\0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-a\\\frac{a+b}{2}\end{matrix}\right)_{F_1=F_1+F_2} =$$

$$\left(\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\frac{-a+b}{2}\\\frac{a+b}{2}\end{matrix}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \left(\frac{-a+b}{2}\right)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{a+b}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Ahora se encuentra: $\overrightarrow{QP} = P - Q = \left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right. - \left|\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}\right. = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = \frac{3}{2}\\x_2 = \frac{5}{2}\end{cases}$$

Por lo tanto: $\left[\overrightarrow{QP}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\vec{P}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

Después determinar la matriz de cambio de base:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$[Id]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto empleamos la ecuación: $[X]_{\Re_2} = [P]_{\Re_2} + [Id]_{B_2}^{B_1}[X]_{\Re_1}$

$$[X]_{\Re_2} = \begin{vmatrix} \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{5}{2} \end{vmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{5}{2} \end{vmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{7}{2} \end{vmatrix}$$

Ejemplos propuestos de sistemas de referencia

1) Sea el sistema de referencia $\Re = \left\{ O = \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix}; B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\}$ en el espacio afín $\Re^2$. Dada la recta L que pasa por los puntos $P = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ y $Q = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$, con dirección desde P hasta Q. Determinar la ecuación de la recta L en el sistema de referencia $\Re$.

2) Sea el sistema de referencia $\mathfrak{R} = \left\{ O = \begin{vmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} ; B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}$ en el espacio afín $\mathfrak{R}^3$. Dada la recta L que pasa por los puntos $P = \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ y $Q = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$, con dirección desde P hasta Q. Determinar la ecuación de la recta L en el sistema de referencia $\mathfrak{R}$.

3) Sea el sistema de referencia $\mathfrak{R} = \left\{ O = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} ; B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right\}$ en el espacio afín $\mathfrak{R}^3$. Dada el plano π que pasa por los puntos $P = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, $Q = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$ y $R = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$ con dirección desde P hasta Q. Determinar la ecuación del plano π en el sistema de referencia $\mathfrak{R}$.

4) Sea el sistema de referencia $\mathfrak{R} = \left\{ O = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} ; B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\}$ en el espacio afín $\mathfrak{R}^3$. Dada el plano π

que pasa por los puntos $P = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$, $Q = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}$ y $R = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix}$ con dirección desde P hasta Q. Determinar la ecuación del plano π en el sistema de referencia $\mathfrak{R}$.

5) Sean los sistemas de referencia: $\mathfrak{R}_1 = \left(P = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}; B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$ y $\mathfrak{R}_2 = \left(Q = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}; B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$ en el espacio $\mathfrak{R}^3$. Determinar $[X]_{\mathfrak{R}_2}$, si se conoce que $[X]_{\mathfrak{R}_1} = \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Rectas en R²

Existen dos problemas fundamentales de la Geometría Analítica, que se pueden indicar como:

i) Dada una ecuación, encontrar el lugar geométrico.

ii) Dado un lugar geométrico con ciertas condiciones, determinar la ecuación.

Lugar geométrico

Se llama así a la gráfica, que puede ser una línea recta o curva, cuyos puntos satisfacen la ecuación dada.

Definición: Línea recta es un lugar geométrico obtenido al tomar dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del plano, se tiene un valor constante para la pendiente de la recta calculada por la ecuación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ para } x_1 \neq x_2$$

Para determinar una recta se deben conocer dos de sus condiciones: dos puntos, punto y pendiente, etc.

Teorema (Ecuación punto-pendiente): Dados $P_1(x_1, y_1)$ y la pendiente m, entonces la ecuación de la recta que pasa por P_1, está determinada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Demostración: Sea $P(x, y)$, un punto cualquiera de la recta que pasa además por el punto $P_1(x_1, y_1)$, entonces su pendiente está dada por

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Multiplicando ambos miembros por $x - x_1$ y simplificando, se obtiene la ecuación del teorema, a la que se suele llamar también *ecuación punto-pendiente de la recta*.

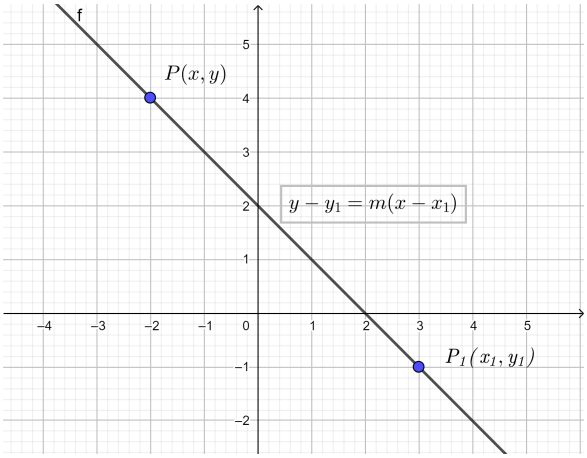

Figura No. 2 Recta punto-pendiente

Teorema (Ecuación pendiente y ordenada en el origen): Si de una recta se conocen su pendiente m y un punto de intersección con el eje de las ordenadas $(0, b)$, de la ecuación 7.9.4, al remplazar $P_1(x_1, y_1)$ por $(0, b)$, se obtiene:

$$y - b = m(x - 0)$$

Al multiplicar y despejar y, la nueva forma de ecuación de la recta es:

$$y = mx + b$$

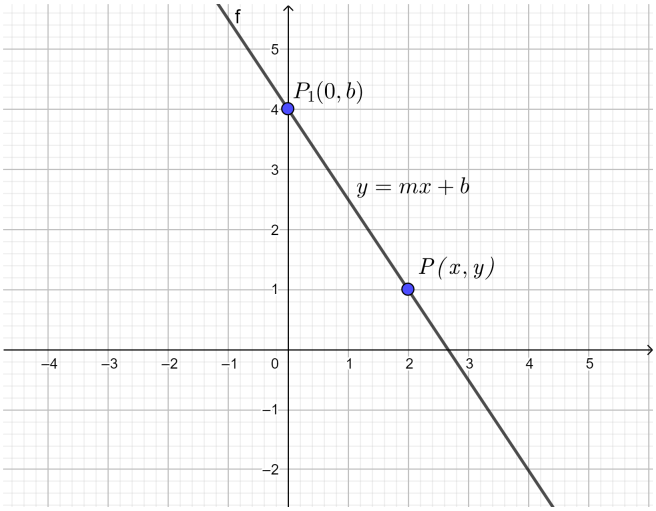

Figura No. 3 Recta punto y ordenada en el origen

Teorema (Ecuación cartesiana de la recta): Dados dos puntos de una recta $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, su ecuación es:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1), con\ x_1 \neq x_2$$

Demostración: Si la recta pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, entonces su pendiente por el teorema que lo precede es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si ya se tiene en valor de la pendiente, y se conoce un punto, entonces utilizando la 7.9.4. se procede a reemplazar el valor de m, obteniendo:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Multiplicando ambos miembros por $x - x_1$ se obtiene la ecuación buscada.

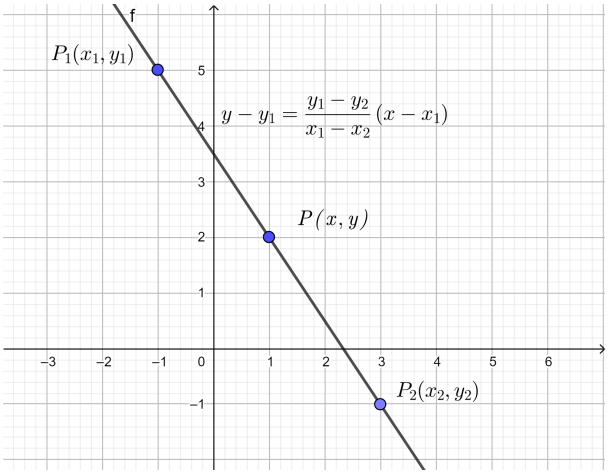

Figura No. 4 Ecuación cartesiana de la recta o, dados dos puntos

Teorema (Ecuación simétrica, reducida o, abscisa y ordenada en el origen): La ecuación de la recta que pasa por lo puntos $(0, b)$, con b, de ordenada en el origen, y $(a, 0)$, con a, de abscisa en el origen es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Demostración: Como se conocen dos puntos, utilizamos la ecuación cartesiana de la recta, y se reemplazan los valores $(0, b)$ y $(a, 0)$, es decir:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{0 - b}{a - 0}(x - a)$$

$$y = \frac{-b}{a}(x - a)$$

$$ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

Dividiendo para ab, se obtiene:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

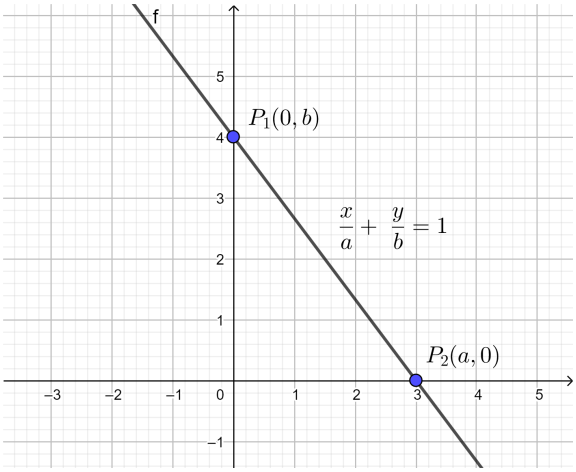

Figura No. 5 Ecuación simétrica de la recta

Forma general de la ecuación de la recta

Una línea recta, se puede decir que está determinada por una ecuación de primer grado en dos variables. Por esta, una ecuación lineal o de primer grado se puede escribir

$$Ax + By + C = 0$$

Esta es la forma general de la ecuación de la recta. En la ecuación, A o B deben ser diferentes de cero y C puede ser o no igual a cero.

Si en la forma general se despeja y:

$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

y se campara con la ecuación 7.9.5. $y = mx + b$, se tendrá que la pendiente de la recta será:

$$m = -\frac{A}{B}$$

Y la ordenada en el origen será

$$b = -\frac{C}{B}$$

Teorema. (Forma normal de la ecuación de la recta): La forma normal de la ecuación de la recta está dada por:

$$x\,cos\omega + y\,sen\,\omega - p = 0,$$

siendo p la longitud de la perpendicular (NORMAL) a la recta trazada desde el origen y $\omega = (0, 360°)$ el ángulo positivo de inclinación de dicha normal con respecto al semieje positivo de las abscisas.

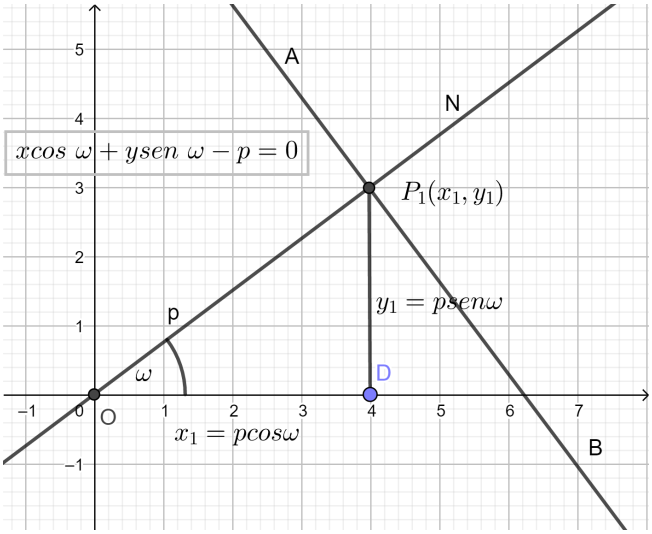

Figura No. 6 Ecuación normal de la recta

Demostración: Sea AB una recta, ON la perpendicular a AB en el punto P_1 trazada desde el origen y $\omega = (0, 360°)$, su ángulo de inclinación positivo. La distancia p desde $O(0, 0)$ a $P_1(x_1, y_1)$ se considera siempre positiva sin importar la posición de AB.

En el triangulo ODP_1, se da que $x_1 = p\cos\omega$ y $y_1 = p\ sen\ \omega$. La pendiente de ON, $m_2 = \tan\omega$ y, como $AB \perp ON$, entonces, si llamamos a la pendiente de AB, m_1 el producto de sus pendientes es $m_1 m_2 = -1$ de donde, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, o lo que es lo mismo:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

$$m_1 = -\frac{1}{\tan\omega} = -\cot\omega = -\frac{\cos\omega}{sen\ \omega}$$

Tomando otro punto $P(x, y)$ de AB y aplicando la fórmula 7.9.6. se tiene que:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$

$$y - p\ sen\ \omega = -\frac{\cos\omega}{sen\ \omega}(x - p\cos\omega)$$

$$y\ sen\ \omega - p\ sen^2\ \omega = -x\ \cos\omega + p\ cos^{\ 2}\ \omega$$

$$\mathrm{x}\cos\omega + y\ sen\ \omega - p\ (sen^2\ \omega + cos^2\ \omega) = 0$$

$$x\cos\omega + y\ sen\ \omega - p = 0$$

Ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(-5,3)$ y $P_2(2,-1)$.

Para resolver este problema utilizamos la ecuación cartesiana de la recta:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

Entonces,

$$y - 3 = \frac{3-(-1)}{-5-2}(x-(-5))$$

$$y - 3 = \frac{4}{-7}(x+5)$$

$$-7y + 21 = 4x + 20$$

De donde, finalmente se obtiene:

$$4x + 7y - 1 = 0$$

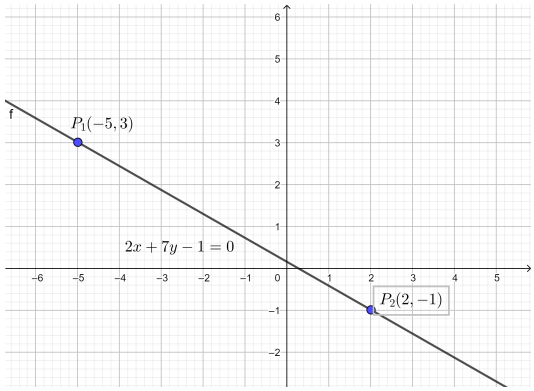

Figura No. 7 *Solución gráfica del ejemplo*

Ejercicios propuestos relacionados con la ecuación de la recta

1. La pendiente de una recta es $m = -\frac{3}{2}$ y pasa por el punto $P_1(3,-2)$. Determine su pendiente. (Solución: $3x - 2y - 5 = 0$)
2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2,3)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $2x - 5y + 2 = 0$. (Solución: $5x + 2y + 4 = 0$)
3. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(-1,4)$ y es paralela a otra cuya ecuación es $-x - 3y + 1 = 0$. (Solución: $x + 3y - 11 = 0$

DISTANCIAS EN EL PLANO R²

Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la distancia $d = \overline{P_1P_2}$ se define por:

$$d = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo: La distancia entre los puntos $P_1(-3, 4)$ y $P_2(5, -1)$ es:

$$d = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{\left(5 - (-3)\right)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{8^2 + (-5)^2} = \sqrt{64 + 25}$$

$$d = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{89} = 9{,}43$$

Ejercicios Propuestos relacionados con la distancia entre dos puntos

1) Hallar las distancias entre cada par de puntos:
   a. $(4, -3)\ y\ (-2, 5)$
   b. $(-4, -1)\ y\ (2, 6)$
   c. $(0, -3)\ y\ (5, 0)$
   d. $(3, 2)\ y\ (-5, -1)$
2) Dado el triángulo formado por los puntos $A(-1, 3)$, $B(-1, -2), C(5, .2)$, Demuestre, por la distancia entre los puntos, que es rectángulo.

3) Calcule el perímetro de la figura formada por los puntos $(-2,0),(0,-4),(5,0),(2,3),(0,4)$.
4) Demostrar que los puntos $(-3,1),(2,3),(4,7),(-1,5)$ son vértices de un paralelogramo.
5) Demostrar que los puntos $(-2,-2),(2,0),(4,4),(0,2)$ son vértices de un rombo.

FORMAS CUADRÁTICAS Y CÓNICAS

Ecuación de la circunferencia

Definición. Circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que mantienen una distancia constante a un punto fijo llamado centro. Una circunferencia queda definida si se conoce su centro y su radio

Teorema. La ecuación de la circunferencia con centro en el punto (h,k) y cuyo radio es la distancia constante r, es:

$$(x-h)^2+(x-h)^2=r^2$$

Demostración. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la circunferencia de centro $C(h,k)$ y radio r, entonces P, por definición, debe cumplir que

$$|\overline{CP}|=r$$

Y, por la distancia entre dos puntos, será

$$d = |\overline{CP}| = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, se tiene,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

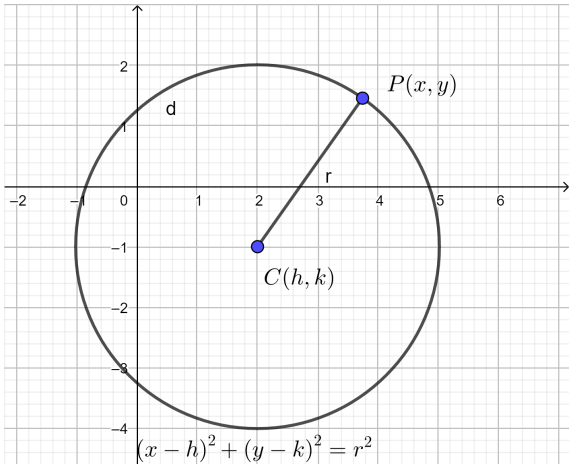

Figura No. 8 Ecuación de la circunferencia

Forma canónica de la ecuación de la circunferencia

Si el centro de la circunferencia es el Origen $C(0,0)$, entonces la ecuación se reduce a:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Forma general de la ecuación de la circunferencia

La forma general se obtiene al desarrollar los cuadrados del teorema de la circunferencia:

$$(x-h)^2+\ (y-\ k)^2=r^2$$

$$x^2-2hx+h^2+\ y^2-2ky+y^2-r^2=0$$

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+\ y^2-r^2=0$$

Lo que se puede escribir

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Por lo que,

$$D=-2h; E=-2k; F=h^2+\ y^2-r^2$$

Para llegar de la forma general de la ecuación de la circunferencia, a la forma del teorema, se procede a completar los cuadrados perfectos para x y para y, sumando $\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}$

$$\left(x^2+Dx+\frac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+Ey+\frac{E^2}{4}\right)=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

Factorizando, se tiene:

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

De esto se deduce que:

i) Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la circunferencia tiene centro $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.
ii) Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la circunferencia es imaginaria.
iii) Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, el radio es cero y la ecuación representa al punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$.

Ejemplo: Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $C(-3,1)$ y radio 2.

Datos: $C(-3,1); h = -3; k = 1; r = 2$

Sustituyendo estos valores en la ecuación del teorema de la circunferencia. se tiene:

$$\left(x - (-3)\right)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

Ejemplo: Dada la ecuación: $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$, encontrar la ecuación ordinaria de la circunferencia, si existe, luego encuentre su centro y su radio.

Para completar el trinomio cuadrado perfecto para x y para y se debe sumar la mitad del coeficiente de ambas variables y elevarlos al

cuadrado, esto se suma en ambos miembros, por lo que la ecuación quedaría así:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$

Agrupando,

$$(\,x^2 + 4x + 4) \;+\; (\,y^2 + 2y + 1) = 9$$

Factorizando

$$(x + 2)^2 \;+\; (y + 1)^2 \;= 3^2$$

Por lo tanto:

$$C(2{,}1); h = 2; k = 1; r = 3$$

Ejercicios propuestos relacionados con la ecuación de la circunferencia

1. Dadas las siguientes ecuaciones, reducirlas a la forma ordinaria y, s representa a una circunferencia, determinar su centro y su radio.
   i) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0.$
      Respuesta: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9, C(3, -2), r = 3$
   ii) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0.$
      Respuesta: $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 26, C(-1, -5), r = \sqrt{26}$
   iii) $4x^2 + 4y^2 - 12x + 16y - 5 = 0.$

Respuesta: $(2x-3)^2+(2y+4)^2=30, C\left(\frac{3}{2},-2\right), r=\frac{\sqrt{30}}{2}$

2. Encontrar la ecuación general de la circunferencia que tiene centro en el punto $C\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{5}\right)$ y pasa por el punto $P(4,2)$. Respuesta: $900x^2+900y^2-1200x+1440y-16079=0$
3. Encontrar la ecuación de la circunferencia que para por los puntos $P_1(-4,2), P_2(-3,-2), P_1(2,-2)$. Respuesta: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1381}{100}$

Secciones cónicas

Se ha trabajado en los puntos anteriores sobre las ecuaciones de la recta y la circunferencia. Para iniciar el estudio de otras curvas menos conocidas se debe introducir una definición fundamental para entender las relaciones de los puntos de la curva con otros puntos y rectas que se incluyen en la definición y que definen sus características fundamentales.

Definición. El lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto y una recta fijos mantienen una relación constante, se denomina sección cónica o cónica. El punto fijo recibe el nombre de Foco (F) de la cónica, la recta fija se denomina directriz y la relación constante entre las distancias señaladas se denomina excentricidad (e). Ahora, e determina qué clases de cónica se estudia de acuerdo a lo siguiente:

i) Si $e < 1$, la cónica será una elipse.

ii) Si $e = 1$, la cónica será una parábola.

iii) Si $e > 1$, la cónica será una hipérbola.

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

Definición. Parábola es un lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de modo que mantiene una misma distancia a una recta fija y a un punto del plano, que no está en la recta. El punto fijo F y la recta fija l constituyen el foco y la directriz de la parábola.

Elementos de la parábola

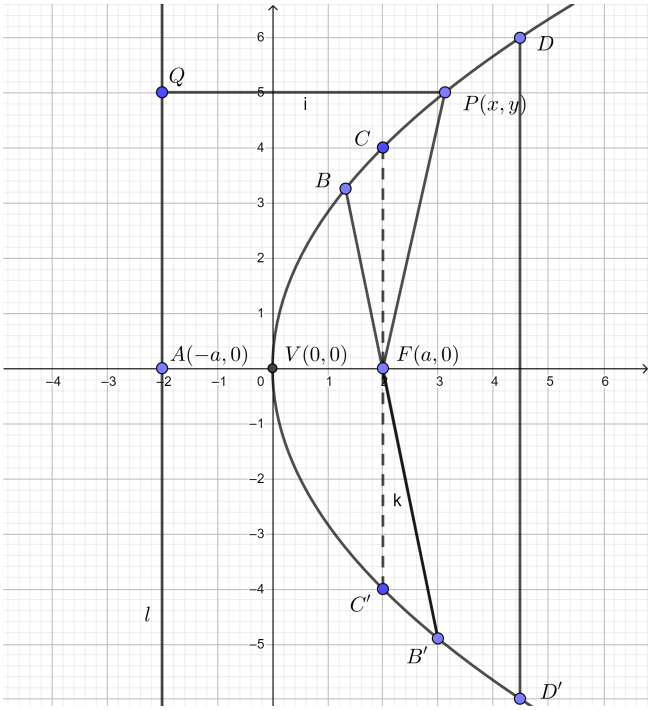

Figura No. 9 Elementos de una parábola

i) **Eje de la parábola.** Es la recta que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz l. En el caso de la figura coincide con el eje de las abscisas.

ii) **Vértice.** Es punto V, donde se intersecta el eje con la parábola. Además es, por definición, el punto medio del segmento AF, es decir, de la distancia entre el foco y el punto A de la directriz. Esa distancia es, por definición, $2a$.

iii) **Cuerda.** Es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la parábola como EE'.

iv) **Cuerda focal.** Es una cuerda que pasa por el foco, como BB'.

v) **Lado recto (latus rectum).** Es la cuerda focal que es perpendicular al eje, su longitud es $4a$.

vi) **Radio Focal o radio vector.** Es el segmento que une el foco con cualquier punto de la parábola, como FP.

7.9.2.1.1. Ecuación de la parábola de centro en el origen y eje, un eje coordenado

Sea F el foco de la parábola, el eje X es el eje de la parábola, las coordenadas del foco $F(a, 0)$. Por definición, la directriz es la recta $x = -a$ o lo que es lo mismo $x + a = 0$. Sea $P(x, y)$, un punto cualquiera de la parábola, desde P se traza una perpendicular a l, con ello se tiene que, por definición, las distancias FP y PQ son iguales, es decir:

$$|\overline{FP}| = |\overline{QP}| \text{ ó } \frac{|\overline{FP}|}{|\overline{QP}|} = e = 1$$

Ahora, por la fórmula de la distancia se tiene:

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2}$$

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

Además,

$$|\overline{QP}| = |x + a|$$

Por ello

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=|x+a|$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y despejando y^2 se tiene:

$$(x-a)^2+y^2=(x+a)^2$$

$$x^2+2ax+a^2+y^2=x^2-2ax+a^2$$

$$y^2=4ax$$

De esta ecuación se deduce que la parábola es simétrica con respecto al eje X, y que la longitud del lado recto es el coeficiente del término de primer grado de la ecuación.

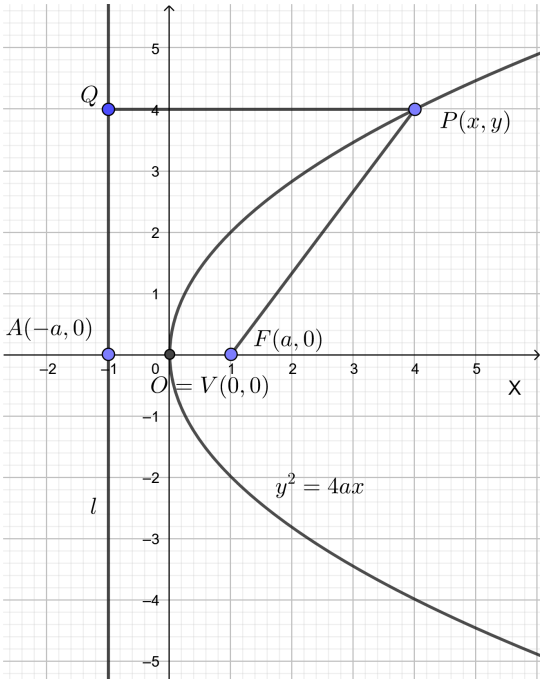

Figura No. 10 Ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje, el eje X.

Si el foco queda a la izquierda de la directriz, la ecuación se verá así:

$$y^2 = -4ax$$

Ahora, si el eje fuese el eje coordenado Y, la ecuación sería:

$$x^2 = \pm 4ay$$

El signo dependería si el foco queda por debajo o por encima de la directriz.

Ecuación de la parábola con vértice (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado

Sea el vértice de la parábola el punto $V(h, k)$, su eje paralelo al eje coordenado X y el foco F a una distancia a del vértice y a su derecha, la directriz paralela al eje Y, estará a la izquierda del foco y a una distancia $2a$ del mismo, la ecuación de la directriz será $x = h - a$ lo cual se puede escribir también $x - h + a = 0$. Sea también $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola.

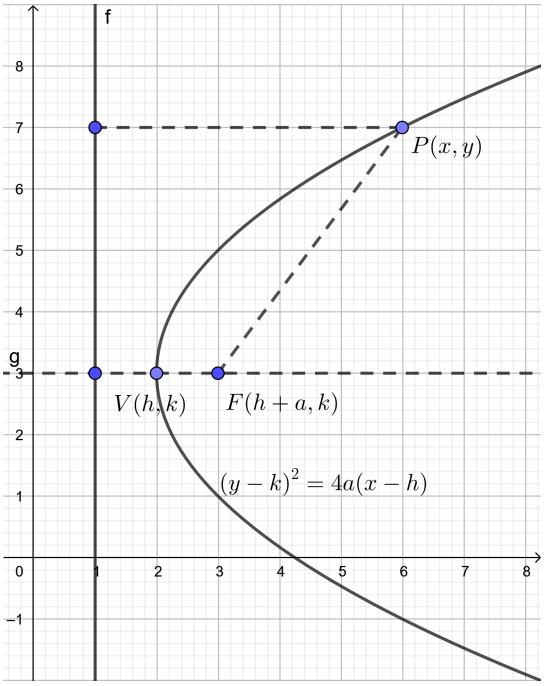

Figura No. 11 Ecuación de la parábola con vértice (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado.

Como:

$$|\overline{FP}| = |\overline{QP}| \text{ ó } \frac{|\overline{FP}|}{|\overline{QP}|} = e = 1$$

Se tiene

$$\sqrt{(x-h-a)^2 + (y-k)^2} = x - h + a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y despejando $(y-k)^2$ se tiene:

$$(x-h-a)^2 + (y-k)^2 = (x-h+a)^2$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando se obtiene:

$$(y-k)^2 = -4a(x-h)$$

Otra forma de escribirla es:

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

Ahora, si el vértice es el punto (h, k) y el eje es paralelo al eje Y, la ecuación sería:

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

Resumiendo, se tendrían 4 ecuaciones:

$$(y-k)^2 = -4a(x-h)$$

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

$$(x-h)^2 = -4a(y-k)$$

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

De esto, como a es la distancia entre el vértice y el foco, se tiene que, si $a > 0$, la parábola abre hacia la derecha o hacia arriba, y, si $a < 0$, la parábola abre hacia la izquierda o hacia abajo dependiendo del eje.

Desarrollando:

$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$

Se tiene:

$$y^2 - 2ky + k^2 = 4ax - 4ah$$

De donde

$$y^2 - 4ax - 2ky + k^2 + 4ah = 0$$

Haciendo: $A = -4a$; $-2k = B$; $C = k^2 + 4ah$, se tiene la forma:

$$y^2 + Ax + By + C = 0$$

Esta ecuación representa una parábola que tiene eje paralelo al eje X, con $A \neq 0$. Si $A = 0$, se tendría una ecuación cuadrática que, al resolverla, se pueden obtener, dos raíces reales diferentes, en este caso el lugar geométrico serían dos rectas paralelas al eje X, en caso de ser

las raíces iguales sería una recta y si las raíces son complejas no habría lugar geométrico en el plano real.

Ejemplo: Dada la parábola $5y^2 - 6x = 0$, determine las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.

i) Expresando la ecuación dejando despejada la expresión y^2, se tiene:

$$y^2 = \frac{6}{5}x$$

Por ello, la longitud del lado recto será $\frac{6}{5}u$

ii) De lo anterior se tiene que:

$$4a = \frac{6}{5}$$

$$a = \frac{3}{10}$$

Por tanto, las coordenadas del foco son:

$$F\left(\frac{3}{10}, 0\right)$$

iii) La ecuación de la directriz será:

$$x = -\frac{3}{10}$$

Ejemplo: Determine la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F(-3,2)$ y la directriz es la recta $y = 3$.

Como la directriz es una línea horizontal, el eje de la parábola es paralelo al eje Y , significa que el vértice tiene la misma abscisa que el foco $x = 3$, el foco está por debajo de la directriz, entonces la gráfica es una parábola cóncava hacia abajo, por ello se toma la ecuación:

$$(x - h)^2 = -4a(y - k)$$

Además, la distancia entre el foco y la directriz es igual a 1, por lo tanto $a = \frac{1}{2}$, entonces las coordenadas del vértice serán $V\left(-3, \frac{5}{2}\right)$. Reemplazando valores en la fórmula elegida y desarrollando hasta obtener la expresión más simple:

$$\left(x - (-3)\right)^2 = -4\left(\frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{5}{2}\right)$$

$$(x + 3)^2 = -2\left(y - \frac{5}{2}\right)$$

$$x^2 + 6x + 9 = -2y + 5$$

$$x^2 + 6x + 2y + 4 = 0$$

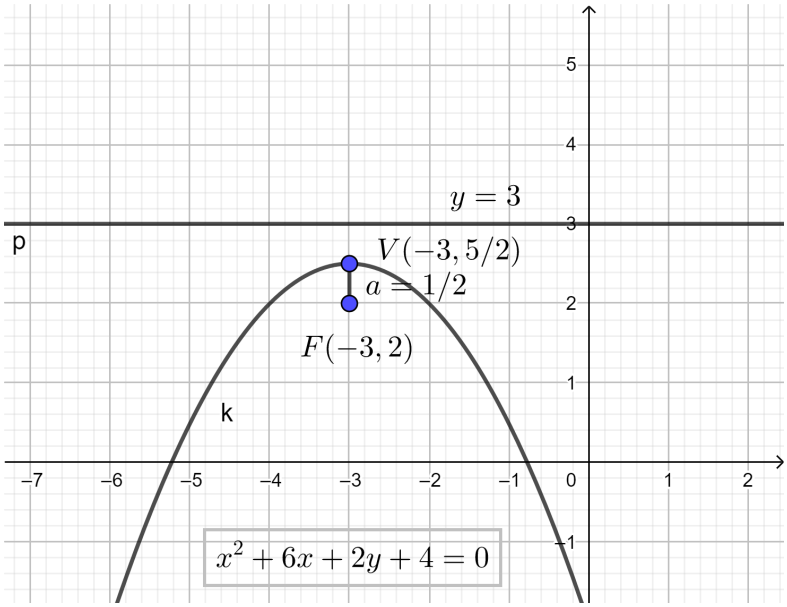

Figura No. 12 Solución gráfica del ejemplo

Ejercicios propuestos relacionados con la ecuación de la parábola

1. Dada la parábola $2x^2 - y = 0$, determine las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.
2. Determine la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F(2,1)$ y la directriz es la recta $x = \frac{9}{2}$. Solución: $y^2 + 5x - 2y = \frac{61}{4}$
3. Determine la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F(-1,2)$ y la directriz es la recta $x = -\frac{9}{2}$.

Ecuación de la elipse

Definición: Elipse es un lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de modo que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es constante y siempre mayor que la distancia entre los dos puntos. Los dos puntos fijos se llaman focos (F, F').

Elementos de la elipse

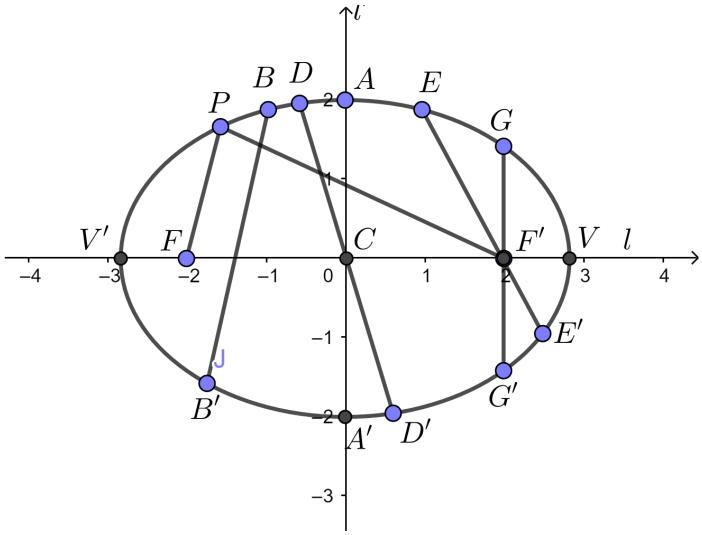

Figura No. 13 Elementos de la elipse

i) **Eje focal.** Es la línea que pasa por los dos focos, como l.

ii) **Vértices.** Son los puntos V y V' donde la elipse se interseca con el eje focal se cortan.

iii) **Eje mayor.** Es el segmento $(\overline{VV'})$ del eje focal que está entre los dos vértices.

iv) **Centro.** Es el punto C, punto medio del segmento entre los focos.

v) **Eje normal.** Es la recta l' perpendicular al eje focal en el punto C.

vi) **Eje menor.** Es el segmento $(\overline{AA'})$ que une los puntos de intersección entre la elipse y el Eje normal.

vii) **Cuerda.** Es un segmento $(\overline{BB'})$ que une dos puntos cualesquiera de la elipse.

viii) **Diámetro.** Es una cuerda que pasa por el centro $(\overline{DD'})$.

ix) **Cuerda focal.** Es una cuerda que para por uno de los focos $(\overline{EE'})$.

x) **Lado recto (latus rectum).** Es la cuerda focal perpendicular al eje focal $(\overline{GG'})$.

xi) **Radios vectores.** Son los segmentos que unen los focos con un punto arbitrario $P(x, y)$ de la elipse, es decir $(\overline{F'P})$ y $(\overline{FP})$.

Ecuación de la elipse con centro en el origen y los ejes coordenados como ejes de la elipse

Sean los puntos $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ dos puntos fijos sobre el eje X , 2a la suma constante, con $a > c$, y el punto $P(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse. Según la definición debe cumplirse:

$$\overline{F'P} + \overline{FP} = 2a$$

Lo que se puede escribir:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

Transponiendo una raíz, elevando al cuadrado y simplificando se tiene:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos miembros nuevamente al cuadrado, simplificando, ordenando y factorizando, se obtiene:

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Dividiendo para $a^2(a^2 - c^2)$, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Como se dijo que $a > c$, entonces $a^2 - c^2 > 0$. Reemplazando $a^2 - c^2$ por b^2, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A esta ecuación se la conoce como primera ecuación ordinaria de la elipse o ecuación canónica de la elipse. Si la ecuación anterior se multiplica por a^2b^2, se tiene la forma:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Tener en cuenta que en cada elipse, la longitud del semieje mayor es a, la longitud del semieje menor es b, y la distancia del origen a los focos es c y la relación que guardan estas distancias está dado por:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

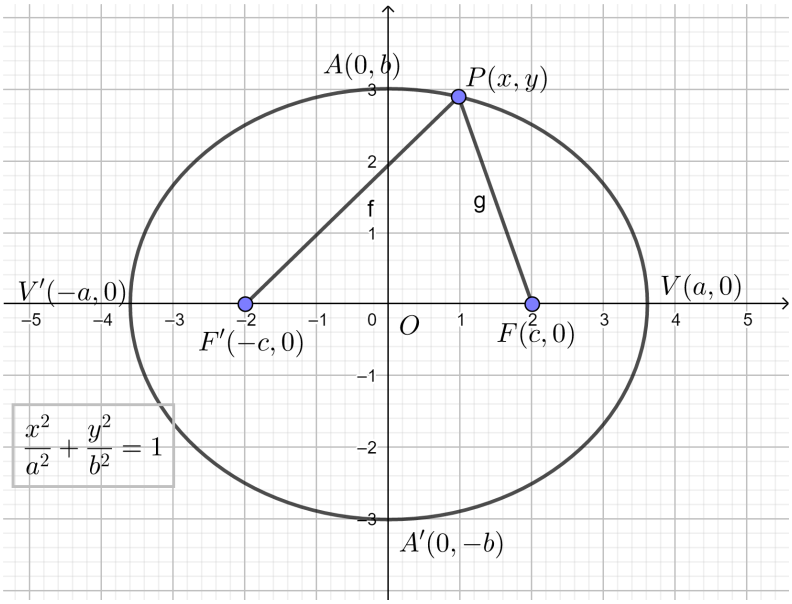

Figura No. 14 *Ecuación de la elipse de centro en el origen y como ejes los ejes coordenados*

Si los focos estuvieran sobre el eje de las ordenadas, la ecuación tomaría la forma:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

La ecuación de la elipse es simétrica a ambos ejes coordenados y, por tanto, al origen, por tener para x e y potencias pares.

Despejando y en la ecuación, se tiene que:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Esto significa que los valores de y se pueden obtener solamente para valores de x para el intervalo $[-a, a] = -a \leq x \leq a$

Despejando x en la ecuación, se obtiene:

$$x = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$$

Esto significa que los valores de x se pueden obtener solamente para valores de x para el intervalo $[-b, b] = -b \leq y \leq b$

En base a estos dos últimos resultados se tiene que la elipse está limitada por un rectángulo, sus lados son las rectas $x = \pm a$ y $y = \pm b$, las longitudes de sus lados serán, por lo tanto, $2a$ y $2b$. Por estar limitada por un rectángulo será una curva cerrada. No tiene asíntotas verticales ni horizontales.

Como el foco tiene coordenadas $(c, 0)$, reemplazando el valor de la abscisa en la fórmula despejada para y, se obtiene:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} = \pm \frac{b^2}{a}$$

De esto se obtiene la longitud del lado recto, que será: $\frac{2b^2}{a}$

La excentricidad de la elipse será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$

Como $c < a$, la excentricidad de la elipse será menos que 1, $e < 1$.

Despenando c se obtiene también: $c = ae$

La elipse tiene dos focos, por ello tiene también dos directrices, cuyas ecuaciones son:

$$x + \frac{a}{e} = 0 \qquad \text{y} \qquad x - \frac{a}{e} = 0$$

Ecuación de la elipse de centro (h, k) y ejes paralelos a los ejes coordenados

Si el centro de la elipse es el punto (h, k) y su eje mayor es paralelo al eje de las abscisas, entonces la ecuación de la elipse toma la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje mayor es paralelo al eje de las ordenadas, la ecuación de la elipse tendrá la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Estas ecuaciones también se las conoce como segunda ecuación ordinaria de la elipse.

Ecuación general de la elipse

Si se toma la ecuación anterior, se transpone, se suma, se desarrollan los cuadrados y se ordena se obtiene:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Esto se puede escribir de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Al comparar las dos ecuaciones vemos que:

$A = b^2; C = a^2; D = -2b^2h; E = -2a^2k; F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$

Los coeficientes A y C, deben ser del mismo signo.

Ejemplo: Dada la ecuación $9x^2 + 25y^2 = 225$, hallar las longitudes de los semiejes mayor y menor, las coordenadas de los focos, La excentricidad, las ecuaciones de las directrices y la longitud del lado recto de la elipse.

Solución: Primero se transforma la ecuación dada a la forma canónica, para ello se divide para 225,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(1) Como $a^2 = 25$, entonces la longitud del semieje mayor es $a = \sqrt{25} = 5$

(2) Como $b^2 = 9$, entonces la longitud del semieje menor es $b = \sqrt{9} = 3$

(3) Para encontrar las coordenadas de los focos se debe encontrar el valor de c, se aplica que:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Por lo tanto, las coordenadas de los focos son: $F = (4,0); F'(-4,0)$

i) La excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

ii) Las ecuaciones de las directrices serán:

$$x + \frac{a}{e} = 0; \text{ ó } x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{5}{\frac{4}{5}} = \pm\frac{25}{4}$$

iii) La longitud del lado recto será:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)^2}{5} = \frac{18}{5}$$

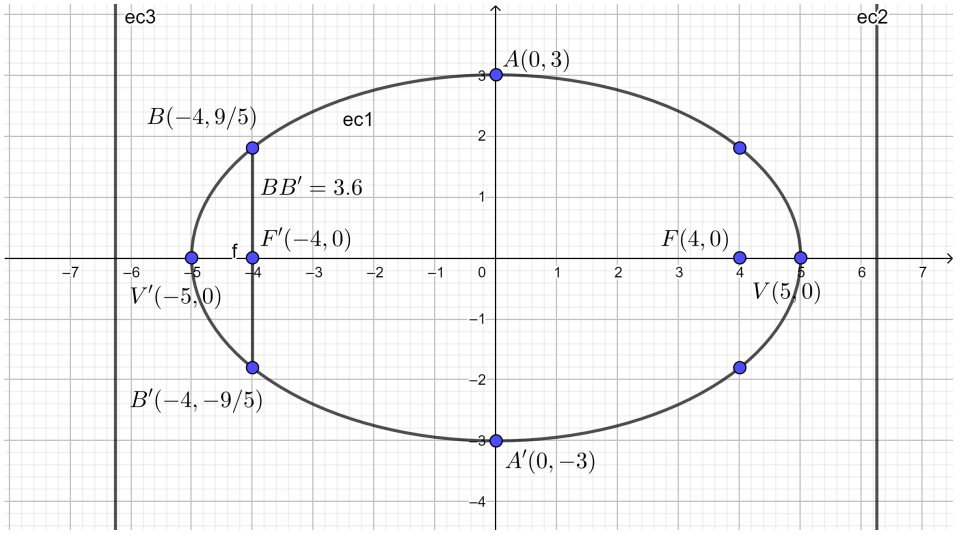

Figura No. 15 *Gráfico solución del ejemplo*

Ejercicios propuestos de la ecuación de la elipse

1. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(2,1)$ y $F'(-4,1)$ y uno de sus vértices es $V(3,1)$. Solución: $7x^2 + 16y^2 + 14x - 32y = 89$
2. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(2,-2)$ y $F'(-2,4)$ y un punto $P(-1,5)$. Solución: $2x^2 + y^2 + 8x - 2y = 9$

Ecuación de la hipérbola

Definición. Hipérbola es un lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de modo que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es constante y siempre mayor que la distancia entre los dos puntos. Los dos puntos fijos se llaman focos (F, F').

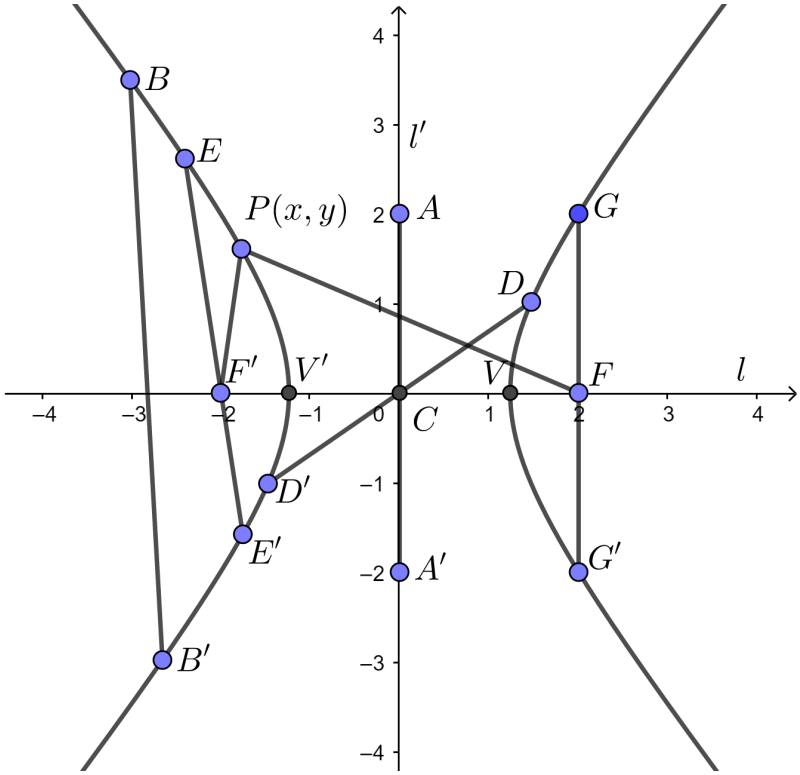

Figura No. 16 *Elementos de la hipérbola*

Elementos de la Hipérbola

i) **Eje focal.** Es la línea que pasa por los dos focos, como l.

ii) **Vértices.** Son los puntos V y V' donde la hipérbola se interseca con el eje focal.

iii) **Eje transverso.** Es el segmento $(\overline{VV'})$ del eje focal que está entre los dos vértices.

iv) **Centro.** Es el punto C, punto medio del eje transverso.

v) **Eje normal.** Es la recta l' perpendicular al eje focal en el punto C.

vi) **Eje conjugado.** Es el segmento $(\overline{AA'})$ cuyo centro C.

vii) **Cuerda.** Es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la hipérbola, pueden ser de la misma rama como $(\overline{VV'})$ o de diferente rama como $(\overline{BB'})$.

viii) **Diámetro.** Es una cuerda que pasa por el centro $(\overline{DD'})$.

ix) **Cuerda focal.** Es una cuerda que para por uno de los focos $(\overline{EE'})$.

x) **Lado recto (latus rectum).** Es la cuerda focal perpendicular al eje focal $(\overline{GG'})$.

xi) **Radios vectores de P.** Son los segmentos que unen los focos con un punto arbitrario $P(x, y)$ de la elipse, es decir $(\overline{F'P})$ y $(\overline{FP})$.

Ecuación de la hipérbola de centro en el origen y ejes los ejes coordenados

Sean los puntos $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ dos puntos fijos sobre el eje X , 2a la diferencia constante, con $a < c$, y el punto $P(x, y)$ un punto cualquiera de la hipérbola. Según la definición debe cumplirse:

$$\overline{F'P} - \overline{FP} = 2a$$

Lo que se puede escribir:

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

Transponiendo una raíz, elevando al cuadrado y simplificando se tiene:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Dividiendo para 4. Luego, elevando ambos miembros nuevamente al cuadrado, simplificando, ordenando y factorizando, se obtiene:

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

Dividiendo para $a^2(c^2-a^2)$, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

Como se dijo que $c > a$, entonces $c^2 - a^2 > 0$. Reemplazando $c^2 - a^2$ por b^2, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ahora, si los focos estuvieran en el eje de las ordenadas serían $F(0, c)$, $F'(0, -c)$, en este caso la ecuación de la hipérbola cambiaría a:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Estas dos ecuaciones de la hipérbola se conocen con primera ecuación ordinaria de la hipérbola o formas canónicas.

Considerando la ecuación cuyo eje focal está sobre el eje X se puede decir que la ecuación de la hipérbola es simétrica a ambos ejes y al origen por contar con potencias pares para x é y.

La hipérbola intersecta al eje X en $x = a$, y $x = -a$, por lo que los vértices tienen coordenadas $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$, de esto se desprende que el eje transverso (VV') de la hipérbola tiene una longitud de $2a$, esta es, justamente, la constante de la definición.

Del mismo modo, las coordenadas de los focos son $F(c, 0)$ y $V'(-c, 0)$, en el proceso para encontrar la ecuación de la hipérbola se utilizó la igualdad $c^2 - a^2 = b^2$, por lo que la relación entre estos valores es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Se utiliza el valor de $2b$ como la longitud del eje conjugado de la hipérbola y se lo ubica en el eje Y.

Despejando y en la ecuación, se tiene que:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Esto significa que para obtener valores reales de y se deben considerar las $x \geq a$ o las $x \leq -a$.

Despejando x en la ecuación, se obtiene:

$$x = \pm\frac{b}{a}\sqrt{y^2 + b^2}$$

Esto significa que x es real para cualquier valor de y.

De la ecuación despejada de y, se encuentra la longitud del lado recto que será

$$\frac{2b^2}{a}$$

La excentricidad de la hipérbola será:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

Como $c > a$, la excentricidad de la elipse será mayor que 1, $e > 1$.

Las directrices, cuando los focos están sobre el eje de las abscisas serán las ecuaciones:

$$x = \pm \frac{a}{e}$$

Las directrices, cuando los focos están sobre el eje de las ordenadas serán las ecuaciones:

$$y = \pm \frac{a}{e}$$

La hipérbola no tiene asíntotas verticales ni horizontales, pero sí tiene asíntotas oblicuas.

Cuando los focos están sobre el eje de las X, las asíntotas están dadas por las ecuaciones:

$$y = \frac{b}{a} x$$

Cuando los focos están sobre el eje de las Y, las asíntotas están dadas por las ecuaciones:

$$y = \frac{a}{b} x$$

Ecuación de la hipérbola de centro C(h, k) y el eje transverso es paralelo al eje de las abscisas

Si el centro de la hipérbola es el punto $C(h, k)$ y su eje transverso es paralelo al eje de las abscisas, entonces su ecuación toma la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

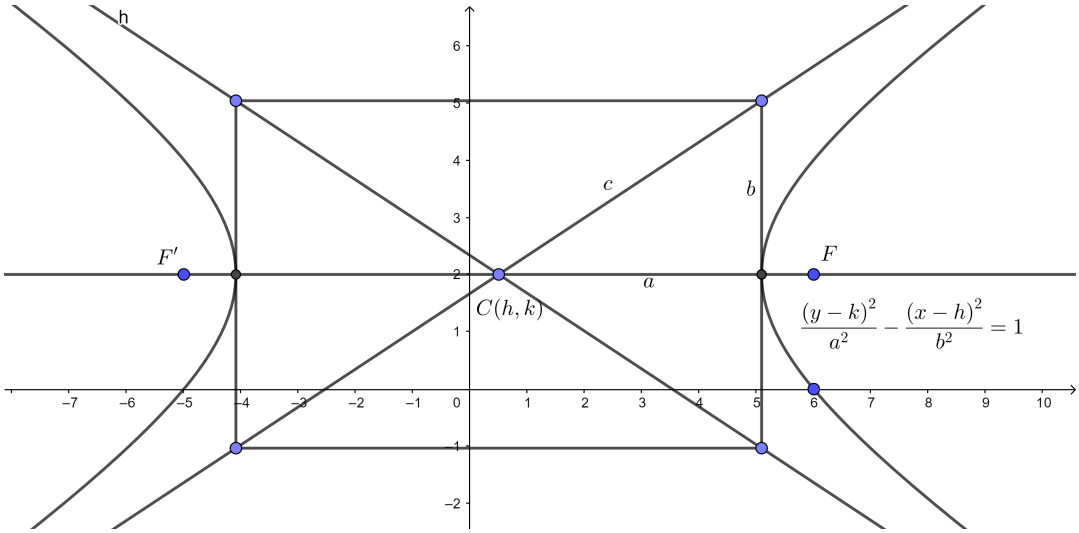

Figura No. 17 *Ecuación de la hipérbola de centro C(h, k) y el eje transverso es paralelo al eje de las abscisas.*

Si el eje transverso es paralelo al eje de las ordenadas, la ecuación de la elipse tendrá la forma

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

En este caso las ecuaciones de las asíntotas están determinadas así.

Cuando el eje focal es paralelo al eje de las X, las asíntotas están dadas por las ecuaciones:

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$$

Cuando el eje focal es paralelo al eje de las Y, las asíntotas entán dadas por las ecuaciones:

$$y - k = \frac{a}{b}(x - h)$$

Forma general de la ecuación de la hipérbola

La ecuación:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Con A y C de diferente signo, representa una hipérbola de ejes paralelos a los coordenados.

Ejemplo: Se tiene la ecuación $16y^2 - 9x^2 = 144$, entonces determinar las coordenadas de los vértices, los focos, las ecuaciones de las directrices, las asíntotas, la longitud del lado recto y la excentricidad de la hipérbola.

Primero se transforma la ecuación dada a la forma canónica, para ello se divide para 144,

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

i) Como $a^2 = 9$, entonces $a = \sqrt{9} = 3$.

Los vértices tienen coordenadas:

$$V(0,3);\ V'(0,-3).$$

ii) Como $b^2 = 16$, entonces $b = \sqrt{16} = 4$;

Por ello $c = \sqrt{16+9} = 5$.

De aquí resulta que los focos son $F(0,5);\ F'(0,-5)$

iii) La excentricidad será:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$

iv) Las ecuaciones de las directrices serán:

$$y + \frac{a}{e} = 0;$$

ó también:

$$y = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{3}{\frac{5}{3}} = \pm\frac{9}{5}$$

v) La longitud del lado recto será:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)^2}{3} = \frac{32}{3}$$

vi) Las ecuaciones de las asíntotas están dadas por:

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4}{3}x$$

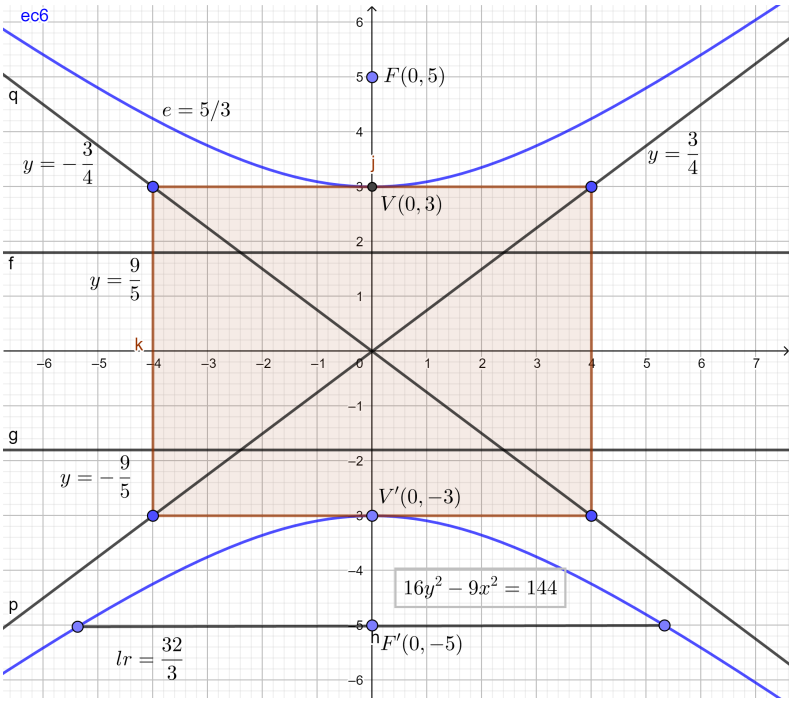

Figura No. 18 *Solución* gráfica *del ejemplo*

Ejercicios propuestos relacionados con la ecuación de la hipérbola

1. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son los puntos $F(4,3), F'(-1,3)$ y que pasa por el punto $P(3,5)$. Solución: $-4x^2 + y^2 + 12x - 6y + 5 = 0$

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son los puntos $F(-3,3), F'(-3,-3)$ y uno de sus vértices es el punto $P(-3,-2)$. Solución: $4x^2 - 5y^2 + 24x = -56$

GLOSARIO

D

E

F

G

I

L

M

N

O

P

R

S

Bibliografía

Aguilar Marquez, A. (2009). *Aritmética y Álgebra* . México: Pearson .

Aguilar Márquez, A. (2010). *Geometría trigonometría y geometría analítica* . México: Pearson .

Anton, H. (2006). *Introducción al álgebra lineal.* México: Pearson .

Aranda, E. (2003). *Algebra lineal con aplicaciones y Python.* Ciudad Real: Lulu.com.

Arce, C., Castillo, W., & González, J. (2003). *Álgebra Lineal.* Costa Rica: Universidad de Costa Rica.

Ben, N. (1989). *Álgebra lineal aplicada.* México: Prentice Hall .

García, s. G. (2012). *Álgebra lineal* . Universidad del Norte .

González, F. R. (2008). *Apuntes, Álgebra, Números omplejos.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Gregori Gregori, V. (2017). *Álgebra matricial.* Valencia: Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia.

Grossman I., S., & Flores Godoy, J. (2012). *Álgebra Lineal.* México: Ma Graw Hill.

Grossman, S. I. (2007). *Álgebra Lineal*. México D.F.: Mc Graw Hill.

Gutiérrez González, E. -O. (2015). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. México: Grupo Editorial Patria.

Kindle, J. H. (s.f.). *Geometría analítica, plana y del espacio*. Cincinati: Mc Graw Hill.

Kindle, J. H., & Kindle, J. H. (2015). *Álgebra Lineal*. Quito: Escuela Politécnica Nacional.

Kolman, B. (2006). *Álgebra lineal*. México: Pearson.

Lay, D. C. (2013). *Álgebra lineal Para cursos con enfoque por competencias*. México: Pearson.

Lehmann, C. (1976). *Geometría Analítica*. México: UTEHA.

Lipschutz, S. (1977). *Álgebra Lineal*. Colombia: McGraw-Hill.

Llerena, I. -C. (2000). *Álgebra lineal y geometría*. España: Editorial Reverté.

Martín Ordonez, P. -G.-G. (2012). *Álgebra lineal para ingenieros*. Madrid: Delta Publicaciones.

Mendoza, F. (2001). *Una Introducción a los números complejos*. Mérida: Universidad de los Andes.

Nuñez, L. A.-V.-B. (2019). *Álgebra lineal.* República Dominicana: Universidad Abierta para Adultos (UAPA).

Torres Quijije, A. I., Pico Saltos, R. B., & Medina Moreira, D. (2021). *Matemática Básica*. Quevedo: Grupo Compás.

Torres Quijije, Á., & Vinces, L. (2021). *Introducción al Cálculo Diferencial.* Quevedo: Grupo Compás.

V. Costa, R. R. (2018). *Algebra Lineal con Aplicaciones, Parte I.* Argentina: Editorial de la Universidad de la Plata.

ISBN: 978-9942-33-546-3

compAs
Grupo de capacitación e investigación pedagógica

@grupocompas.ec
compasacademico@icloud.com