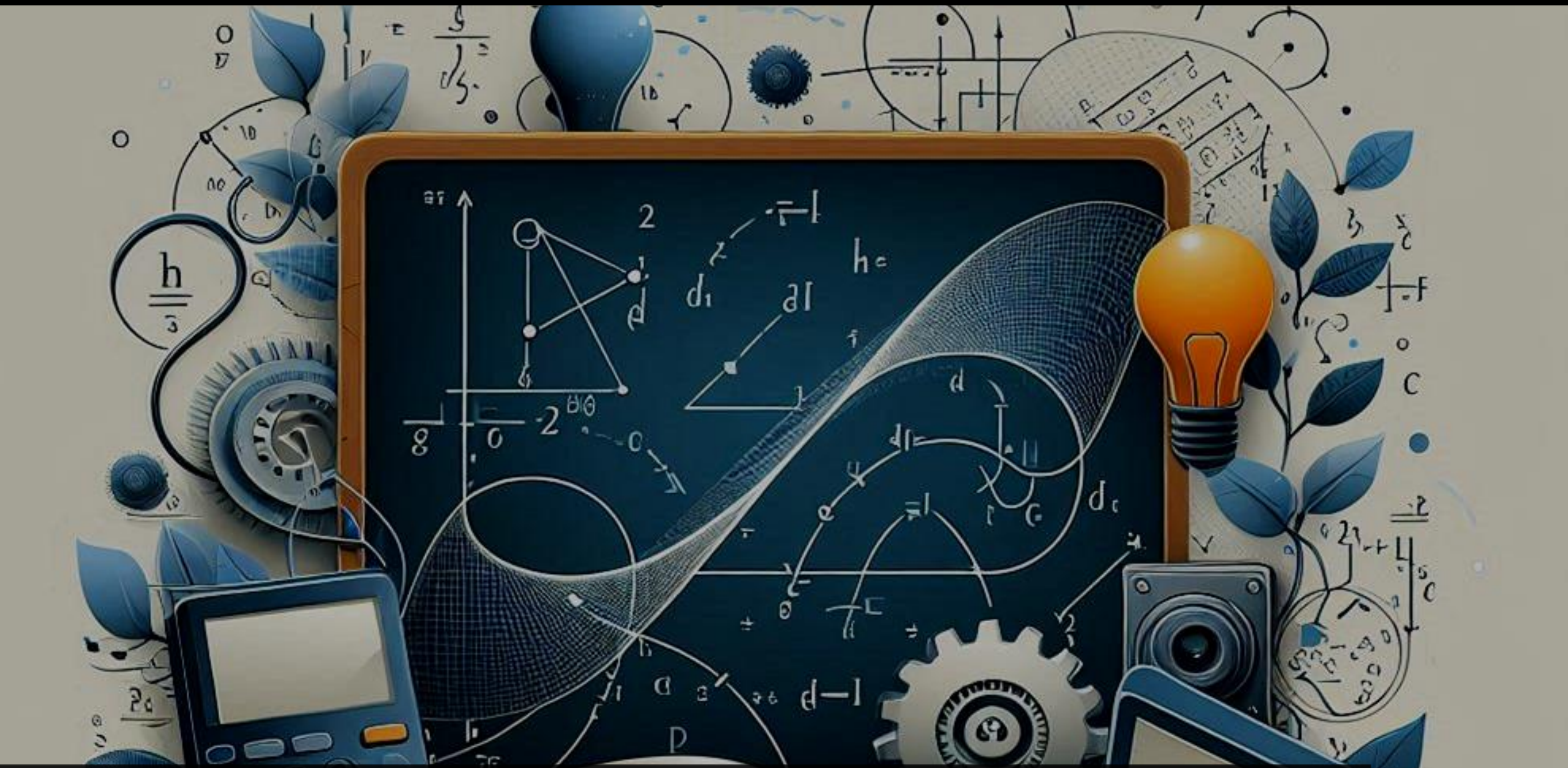


FUNCIONES ELEMENTALES E INTERPRETACIÓN DE LAS DERIVADAS PARCIALES APLICADAS A LA INGENIERÍA

Autores:

Rodolfo Najarro Quintero
Kelvin Diego Moposita Ortega
Jeyson Patricio Egas García
Daisy Judith Nata Castro

EDITORIAL ALEMA

ISBN 978-9942-7272-3-7

Primera Edición 2024
ISBN: 978-9942-7272-3-7
2024, ALEMA Casa Editora-Editorial Internacional S.A.S.D
Calle Simón Bolívar. A 200 metros del Parque Central de Jipijapa. Jipijapa, Ecuador.
https://editorialalema.org/libros/index.php/alema

Diseño y diagramación:
Mgtr. Wilter Leonel Solórzano Álava
Corrección de contenidos:
Dr. C. Omar Mar Cornelio
Diseño, montaje y producción editorial:
ALEMA Casa Editora-Editorial Internacional S.A.S.D, Ecuador

Hecho en Ecuador, Made in Ecuador

Este texto ha sido sometido a un proceso de evaluación por pares externos.

ISBN: 978-9942-7272-3-7

Funciones elementales e interpretación de las derivadas parciales aplicadas a la Ingeniería

Autores:

Rodolfo Najarro Quintero
Doctor en Ciencias Técnicas. Magíster en Conectividad y Redes de Ordenadores. Ingeniero Mecánico.
Docente de la Universidad Técnica de Cotopaxi, carrera Ingeniería en Sistemas.
Correo: rodolfo.najarro@utc.edu.ec
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1238-0106

Kelvin Diego Moposita Ortega
Máster Universitario en Ingeniería Mecánica. Ingeniero Mecánico.
Docente de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo, carrera Ingeniería Industrial
Correo: kmopositao@uteq.edu.ec
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1032-8558

Jeyson Patricio Egas García
Magíster en Producción y Operaciones Industriales. Ingeniero Mecánico.
Docente de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo, carrera Ingeniería Industrial
Correo: jegasg@uteq.edu.ec
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0064-8638

Daisy Judith Nata Castro
Máster Universitario en Seguridad Informática. Ingeniera en Sistemas.
Docente de la Universidad Técnica Estatal de Quevedo, en la Carrera de Ingeniería de Software e Ingeniería en Telemática
Correo: dnatac@uteq.edu.ec
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1193-9908

Resumen

Este libro ofrece una introducción rigurosa a la teoría de funciones, abarcando desde conceptos fundamentales hasta aplicaciones avanzadas en ingeniería y sistemas complejos. El texto se estructura en una progresión lógica, comenzando con una exposición meticulosa de las funciones elementales, sus propiedades y operaciones, lo que establece una base sólida para análisis posteriores más sofisticados. En su desarrollo, el libro profundiza en las funciones de una variable real, enfatizando su representación gráfica y su capacidad para modelar fenómenos en diversas disciplinas científicas. Posteriormente, se adentra en el estudio de funciones multivariables, destacando su crucial papel en la modelización de sistemas avanzados que involucran múltiples factores interdependientes. Un aspecto sobresaliente de la obra es su enfoque en las derivadas parciales como herramienta fundamental para el análisis y optimización de sistemas complejos. Este énfasis facilita la comprensión de las interacciones entre variables, proporcionando insights valiosos para la toma de decisiones en campos como la ingeniería. A lo largo del texto, se intercalan ejemplos aplicados y ejercicios prácticos que refuerzan la asimilación de los conceptos teóricos, ofreciendo un equilibrio óptimo entre teoría y práctica. Esta aproximación pedagógica convierte al libro en un recurso invaluable para estudiantes de matemáticas, ingeniería y disciplinas afines, que buscan aplicar estos conocimientos en la resolución de problemas técnicos y en el análisis de sistemas complejos. En síntesis, esta obra logra una simbiosis efectiva entre el rigor matemático y la aplicabilidad práctica, constituyéndose como una herramienta esencial para aquellos que aspiran a dominar la teoría de funciones y su implementación en escenarios reales y desafiantes.

Palabras clave: derivadas parciales; dominio; interdependencia; modelización; optimización

Abstract

This book offers a rigorous introduction to function theory, covering fundamental concepts to advanced applications in engineering and complex systems. The text follows a logical progression, starting with a meticulous exposition of elementary functions, their properties, and operations, which establishes a solid foundation for more sophisticated analyses. As the book develops, it delves into functions of a real variable, emphasizing their graphical representation and their ability to model phenomena in various scientific disciplines. Subsequently, it explores the study of multivariable functions, highlighting their crucial role in modeling advanced systems that involve multiple interdependent factors. A standout feature of the work is its focus on partial derivatives as a fundamental tool for the analysis and optimization of complex systems. This emphasis facilitates the understanding of interactions between variables, providing valuable insights for decision-making in fields such as engineering. Throughout the text, applied examples and practical exercises are interspersed to reinforce the assimilation of theoretical concepts, offering an optimal balance between theory and practice. This pedagogical approach makes the book an invaluable resource for students of mathematics, engineering, and related disciplines who seek to apply this knowledge in solving technical problems and analyzing complex systems. In summary, this work achieves an effective symbiosis between mathematical rigor and practical applicability, establishing itself as an essential tool for those aspiring to master function theory and its implementation in real-world and challenging scenarios.

Keywords: *domain; interdependence; modeling; optimization; partial derivatives.*

Índice general

Índice de figuras

Prólogo

En este texto se asume el concepto de función como objeto matemático que se utiliza para expresar la dependencia entre dos magnitudes y puede presentarse a través de varios aspectos complementarios. Uno de los conceptos más importantes en Matemáticas es el de función, que se puede aplicar en numerosas situaciones de la vida cotidiana, y determinar las relaciones que existen entre magnitudes tanto en Matemáticas, Físicas, Ingeniería Mecánica y otras disciplinas para poder calcular el valor de una de ellas en función de otras.

Por lo que la necesidad de aplicar las funciones es inminente, pero existen dificultades para su aprendizaje por lo que pretendemos con el presente texto ayudar a su comprensión para que se pueda aplicar a nuestra vida cotidiana.

En esta oportunidad es interesante estudiar las funciones de la forma $y = f(x)$, la cual pone a y en función de x. Ahora bien, en la práctica hay muchos problemas que no se pueden resolver con funciones de una sola variable, en este libro nos daremos cuenta de la importancia que tienen las funciones de varias variables en las áreas mencionadas. Es por eso por lo que pretendemos generalizar a funciones de varias variables, algunos conceptos ya estudiados para funciones de una variable, centrando nuestra atención en la representación analítica de dichas funciones, pues la representación gráfica solo es posible para funciones de dos variables.

En fin, queremos que, al concluir este libro, seamos capaces de calcular las derivadas parciales de una función de varias variables cualquiera que sea la forma en que venga representada: explícita simple, explícita compuesta, implícita por una ecuación e implícita por un sistema de ecuaciones, e interpretar analítica y económicamente los resultados.

Queda para los estudiantes universitarios y la comunidad de docentes que pueden consultar este valioso contenido.

¡LOS AUTORES!

Introducción

Los autores para este libro asumimos que la matemática es la ciencia que estudia las propiedades de los números y las relaciones que se establecen entre ellos, es la ciencia deductiva que se dedica al estudio de las propiedades de los entes abstractos y de sus relaciones. Esto quiere decir que las matemáticas trabajan con números, símbolos, figuras geométricas, funciones y relaciones, entre otras

Los orígenes de la noción de función y su influencia significativa en la evolución de la ciencia pueden fijarse en el siglo XVII.

El concepto de función aparece explícitamente en Leibniz (1682) y es utilizado por Bernoulli desde 1694. Euler en 1734 introdujo el símbolo f(x).

El concepto general de función algebraica, incluso no expresable por radicales, fue claramente definido por Euler, quien le llamara función trascendente.

A partir de un cierto momento, se atendió a la correspondencia en sí misma al considerar el concepto de función, quedando establecida por Dirichlet como concepto general en 1854: "como una correspondencia arbitraria entre dos variables".

En el presente libro estudiaremos lo más importante del análisis, el cual, está referido al concepto de función. Veremos algunas formas específicas para definirlo y haremos énfasis en algunas características fundamentales que le están asociadas con vistas a su ulterior aplicación. Durante todo el desarrollo del libro, serán de uso muy frecuente para calcular límites y derivadas, así como para la representación gráfica de las funciones elementales de variable real, de las que vamos a hacer un breve estudio, destacando los aspectos básicos más relevantes cuyo uso será frecuente.

Una de las funciones de mayor uso y la más simple en su expresión, son las polinomiales.

Pretendemos mostrar cómo la matemática y en particular el análisis de funciones tiene importancia en la formulación de modelos matemáticos y puede utilizarse para resolver problemas reales como los que se presentan en el mundo de los negocios, las ciencias y la vida real, además de superar las dificultades que presentan los estudiantes en el tema de funciones, promoviendo de este modo un aprendizaje con significación social y utilidad práctica.

CAPÍTULO I.- TEORÍA DE LAS FUNCIONES

Conceptos básicos de funciones de una variable real

Definición

"Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Si a caca elemento de A le hacemos corresponder de alguna manera, un UNICO elemento en B decimos que dicha correspondencia define una función o aplicación del conjunto A en B".

Nota: Estos tipos de correspondencia unívoca, algunos autores le denominan función UNIFORME. Salvo advertencia en contrario, sólo trabajaremos con funciones UNIFORMES.

NOTACIÓN $\quad f: \quad A \longrightarrow B$

$\qquad\qquad\qquad x \text{ -------------------- } y = f(x)$

Al conjunto A se le denomina CONJUNTO DE PARTIDA o DOMINIO de la función.

Al conjunto B se le llama CONJUNTO DE LLEGADA.

El elemento "y" imagen por f de cada elemento "x" de A se le llama imagen, y al conjunto de todas esas imágenes se les llama IMAGEN DE f o RECORRIDO de f (en este libro se le llama RANGO DE f, lo cual no es muy habitual).

Se denota por: $\mathbf{Im}\, \boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f(x)}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}\} \subseteq \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{domf} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{Conj.partida}$

Ejemplos de función:

a) A cada número real "x" se le asociada su cuadrado "x^2"

b) A cada país del mundo se le hace corresponder su ciudad capital.

Es bueno destacar que los conjuntos A y B no tienen que ser necesariamente numéricos.

Cuando A y B son subconjuntos de los números reales, entonces f se denomina función real de una variable real. Es costumbre en tal caso utilizar para la designación de la variable la letra "x" (variable independiente) y para la imagen de cada elemento x de A utilizar la letra "y" (variable dependiente).

Otra posible forma de definir el concepto de FUNCIÓN puede ser a través de un conjunto de pares ordenados de modo tal que las primeras componentes no aparezcan repetidas en más de un par ordenado.

Por tanto: $\boldsymbol{f = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}}$

Gráficamente puede identificarse que estamos en presencia de la gráfica de una función cuando al trazar rectas paralelas al eje de las “y” éstas cortan dicha gráfica en un solo punto. Si alguna recta cortara a la gráfica en más de un punto, entonces, ese gráfico no se corresponde con el de una función (al menos, uniforme).

Una función puede estar definida de manera explícita por una ecuación determinada, puede definirse mediante alguna descripción, o por varias fórmulas matemáticas (por tramos), etc… entre otras formas.

Ejemplos: a) f: R -------- R
x ------- y = x^2+x+1

b) g: R ----------- R
x ---------- g(x) =sen(3x+2)

c) $\boldsymbol{h(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^2 + 3} & \boldsymbol{si\ \ x > 0} \\ \boldsymbol{x - 5x^3} & \boldsymbol{si\ \ x < 0} \end{cases}$

d) Cierta función f hace corresponde a cada país del mundo con su cuidad capital.

e) Función definida por pares ordenados: $\boldsymbol{S = \{(-2,4), (2,-1), (3,2), (4,-4), (5,8)\}}$

En este caso: dom S = $\boldsymbol{\{-2,2,3,4,5\}}$ Rango S = Im S = $\boldsymbol{\{4,-1,2,-4,8\}}$

Ceros de una función:

z_0 es un cero de f sí y sólo sí f(x_0)=0

De acuerdo con la definición, para hallar los ceros de cierta función conocida su expresión analítica y = f(x) basta resolver la ecuación f(x)=0.

Geométricamente los ceros de f pueden interpretarse como los puntos donde la gráfica de f corta al eje “x”, es decir, los denominados interceptos con el eje “x”.

Polos de una función:

X0 es un polo de f(x) = P(x)/Q(x) sí y solo sí $P(x_0) \neq 0$ con $Q(x_0) = 0$

El concepto de POLOS está referido a funciones que tengan denominadores, funciones racionales, de modo que los polos, son los ceros del denominador que a su vez no anulen al numerador. Aquellos valores que anulen simultáneamente a ambos términos de la expresión fraccionaria no son polos de ella, ni tampoco ceros de ella.

Queda igualmente claro que los CEROS de este tipo de función son los valores que anulan el NUMERADOR pero que no anulan simultáneamente al DENOMINADOR.

Intercepto con los ejes coordenados

Ya dijimos que los interceptos con el eje "x" no son más que los CEROS de f.

Los interceptos con el eje "y" se determinan haciendo x = 0 en la expresión de f y determinando los valores de "y" correspondientes.

Paridad

Esta propiedad caracteriza la simetría de la gráfica de f respecto a alguna recta.

Definición:

f es PAR en $(-a, a), a > 0 \Leftrightarrow f(-x) = f(x), \quad \forall x \in dom f$

De modo que el gráfico de una función PAR es simétrico respecto al eje "y".

Similarmente:

f es IMPAR en $(-a, a), a > 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in dom f$

Lo que significa que la gráfica de f en este caso, es simétrica respecto al origen.

Ejemplos:

a) $f(x) = x^2$ es una función PAR en cualquier intervalo simétrico del origen y su gráfica es simétrica respecto al eje "y"

b) $g(x) = x^3$ es obviamente una función IMPAR, su gráfica es simétrica respecto al origen.

c) $\boldsymbol{w(x)} = |\boldsymbol{x}|$ es también PAR y su gráfica es simétrica respecto al eje “y”.

d) $\boldsymbol{h(x)} = \dfrac{\boldsymbol{4x}}{\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{1}}$ no es ni PAR ni IMPAR. Observe que al reemplazar “x” por “-x” no se cumple ninguna de las dos definiciones.

Signo de una función

Si f(x) >0 para todo x de cierto intervalo I entonces f es POSITIVA en dicho intervalo I

Si f(x) <0 para todo x de cierto intervalo I entonces f es NEGATIVA en dicho intervalo I

Tener información del signo de una función en cierto intervalo I, ofrece la ventaja de poner conocer que el gráfico de f en dicho intervalo está por encima (si f es POSITIVA) del eje “x” o por debajo del eje “x” (si f es NEGATIVA).

Monotonía de una función

Intuitivamente podemos definir el concepto de función monótona en cierto intervalo, independientemente de que este concepto será muy bien formalizado más adelante, cuando estudiemos la DERIVADA.

Por el momento, puede definirse así:

f es monótona estrictamente creciente sobre un intervalo I sí y sólo sí para todo x_1, x_2 del dominio de f se cumple que: Si $x_1 > x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

Similarmente:

f es monótona estrictamente decreciente sobre un intervalo I sí y sólo sí para todo x_1, x_2 del dominio de f se cumple que: Si $x_1 > x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Con esta información es posible determinar con exactitud la existencia de algún posible punto de MÁXIMO o MÍNIMO local de f en dicho intervalo.

Si se conoce que en la vecindad de un punto x_0 f cambia la monotonía de decreciente a creciente, entonces diremos que en x_0 hay un punto de MÍNIMO LOCAL. El valor $f(x_0)$ se llama MÍNIMO LOCAL de f en dicho punto.

Similarmente, si se conoce que en la vecindad de un punto x_0 f cambia la monotonía de creciente a decreciente, entonces diremos que en x_0 hay un punto de MAXIMO LOCAL. El valor $f(x_0)$ se llama MAXIMO LOCAL de f en dicho punto.

Ejemplo

Sea $f(x) = x^2$ definida de R en R.

En este caso es fácil observar que:

a) dom f = R, puesto que esta función nunca se indefine en ningún valor real.

b) Im f = R_+, porque siempre $x^2 \geq 0$ para todo x real.

c) Por lo anterior, se conoce que la función es POSITIVA en todo R, excepto en un único punto: x = 0 donde se anula.

d) El punto x = 0 es el único CERO de f en R, ya que no existen otros valores donde f(x) = 0.

e) En el intervalo $(-\infty,0)$ la función es monótona estrictamente decreciente y en el intervalo $(0,+\infty)$ es monótona estrictamente creciente, por tanto, en una vecindad de x = 0 hay un cambio de monotonía de f, luego, x = 0 es un punto de MÍNIMO LOCAL, y f (0) = 0 es el valor MÍNIMO de f en todo su dominio.

f) Como para todo x real se cumple que f (-x) = f(x) entonces la función es PAR en cualquier intervalo simétrico al origen.

g) La gráfica de la función es muy sencilla y harto conocida por el lector desde niveles precedentes:

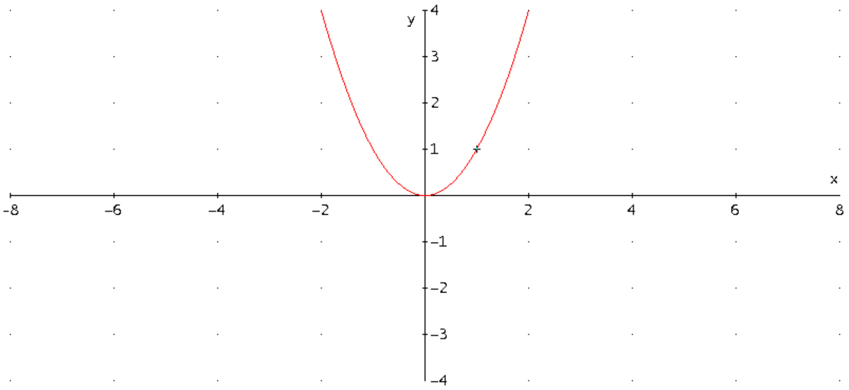


Figura 1

La parábola normal

Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad

Estas propiedades asociadas a una función nos permitirán, definir el concepto de función inversa, como lo es el caso de la inyectividad.

Definición: Sea f: A ------- B una función cualquiera.

f es inyectiva en cierto intervalo I de su dominio, sí y sólo sí, para cualesquiera dos puntos $x_1 \neq x_2$ entonces se cumple que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Si analizamos el sentido que tiene la definición, nos daremos cuenta, que inyectividad significa que dos preimágenes de una función no pueden tener una misma imagen.

Por tal motivo, en el ejemplo anterior, $f(x) = x^2$ es una función FRANCAMENTE no inyectiva, pues baste sólo poner como contraejemplo:

Si tomamos x = -1 y x = 1 que sabemos son diferentes entonces sin embargo ocurre que f(1) = f(-1) lo cual no satisface la definición.

Equivalentemente, puede decirse que una función es inyectiva sí y sólo sí $f(x_1) = f(x_2)$ entonces implica que $x_1 = x_2$.

La justificación de tal equivalencia puede verla cuando estudie LÓGICA MATEMÁTICA y sepa que toda proposición lógica establecida mediante una equivalencia de otras proposiciones y su contrarrecíproco son equivalentes.

Para reconocer geométricamente que una función es INYECTIVA bastará trazar rectas paralelas al eje “x”. Si al menos una recta corta a la gráfica de una función en al más de un punto, la función NO ES INYECTIVA y si para toda recta que tracemos paralela al eje “x” ocurra que corte a la gráfica de f en sólo un punto, entonces es INYECTIVA.

Si una función no es inyectiva, es posible transformarla en inyectiva, restringiendo el DOMINIO a los valores que garanticen la definición.

Por ejemplo, en el caso que estamos analizando, si restringimos el dominio de definición de $f(x) = x^2$ a los reales positivos, lo que equivale a tomar de la gráfica solo la rama derecha, entonces, la función sí es INYECTIVA.

Es decir: $\begin{array}{l} \boldsymbol{f}: \quad \Re_+ \to \Re \\ \boldsymbol{x} \to \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^2 \end{array}$ es una función inyectiva.

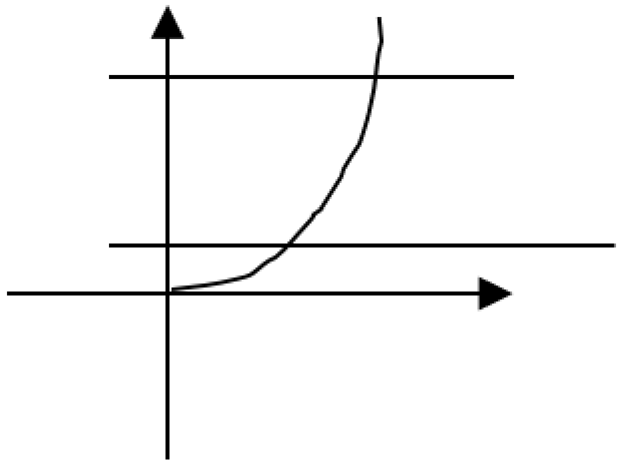


Figura 2

Ejemplo de función inyectiva en un intervalo de su dominio.

Definición: Sea f: A ------- B una función cualquiera.

f es SOBREYECTIVA en un intervalo I sí y sólo sí Im f = B = Conjunto de llegada

En el caso de la sobreyectividad, lo que se plantea es que cuando todo elemento del conjunto B (conjunto de llegada) tiene una preimagen en A (dominio) entonces la función es

SOBREYECTIVA. En estos casos se dice que no hay elementos en B que no tengan una preimagen en A.

Algunos autores denominan a este concepto epiyectiva.

La función f (x) = x^2 que hemos venido analizando ya vimos que restringiendo el dominio pudimos transformarla en inyectiva, pues bien, en este caso, si restringimos el conjunto de llegada al conjunto IMAGEN que sabemos es todos los reales positivos (como ya explicamos antes) entonces logramos la sobreyectividad de esta función.

Es decir: $\begin{array}{l} f: \ \Re_+ \to \Re_+ \\ x \to \ y = x^2 \end{array}$ es una función inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Cuando sucede que una función es inyectiva y sobreyectiva se dice que es BIYECTIVA.

La bisección entendida como la correspondencia uno a uno entre los elementos de dos conjuntos pero en ambos sentidos, tanto de A hacia B como de B hacia A.

Definición: Dada una función f: A-------------- B cualquiera, se dice que:

f es BIYECTIVA $\Leftrightarrow \begin{array}{l} f \text{ es INYECTIVA} \quad y \\ f \text{ es SOBREYECTIVA} \end{array}$

La característica más importante de las funciones BIYECTIVAS es la de tener inversa y ser esta función biyectiva también.

Función inversa

Definición

"Sea f: A $\longrightarrow$ B una función cualquiera. Entonces si f es BIYECTIVA una nueva función que denotaremos por f^{-1} : B $\longrightarrow$ A se denomina función inversa de f "

Es decir, tomando la definición de función mediante pares ordenados se define la función f^{-1} inversa de f, siempre que ésta sea biyectiva, como aquella función formada por los pares ordenados tomados con sus componentes en orden inverso.

A saber:

$$f^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in f\}$$

Algunas relevantes propiedades de esta nueva función de la FUNCION INVERSA son:

a) dom f = A = Im f^{-1}
b) Im f = B = dom f^{-1}
c) f^{-1} es también biyectiva

Es decir, los dominios e imagen de función directa f y de su inversa f^{-1} asociada se intercambian y la nueva función también es biyectiva.

Los gráficos de f y f^{-1} tienen la peculiaridad de ser simétricos respecto a la recta y = x, de modo que todo par (x,y) de f se convierta en (y,x) de f^{-1} como es de esperar.

En el ejemplo que estábamos analizando vimos que la última versión de $f(x) = x^2$ que era biyectiva, tiene una función inversa asegurada $f(x) = \sqrt{x}$, cuyos gráficos son simétricos respecto a dicha recta bisectriz del I y III cuadrantes.

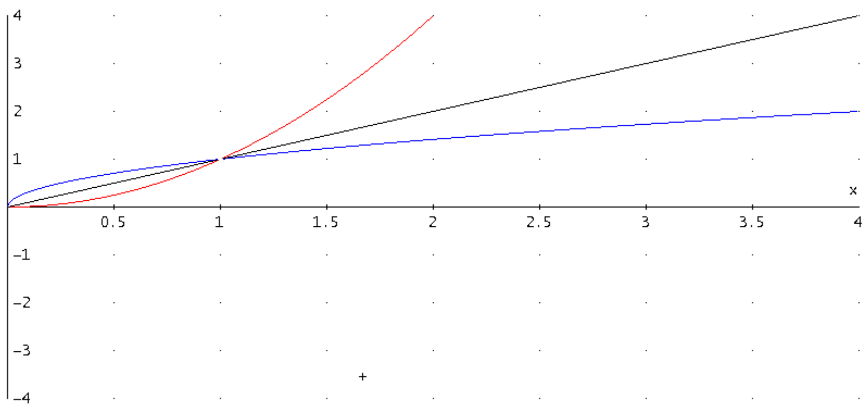


Figura 3

Función inyectiva y su inversa

La función f y su inversa f^{-1} si existe, están íntimamente relacionadas de modo que se cumple:

a) $x = f^{-1}(y)$ **sí y solo si** $y = f(x)$

b) $f^{-1}[f(x)] = f[f^{-1}(x)] = x, \quad \forall x \in dom f, \quad \forall x \in dom f^{-1}$

Para la determinación de la expresión analítica de la función inversa, basta:

a) Analizar previamente si f es biyectiva (función uno a uno)

b) Despejar "x" en función de "y" en la expresión de la función directa.

c) Intercambiar las variables "x" por "y" y viceversa.

d) Hallar el dominio de f^{-1} para verificar que debe ser igual a Im f.

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 + 1$ definida de R_+ en $[1,+\infty)$.

Se conoce que en este dominio, es inyectiva, y además, si imagen es igual al conjunto de llegada, luego sobreyectiva, por tanto biyectiva, luego tiene inversa.

Como $y = x^2 + 1$ despejando "x" tenemos: $x = \sqrt{y-1} = f^{-1}(x)$, por tanto, intercambiando las variables tenemos finalmente: $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

Nótese que el dom $f^{-1} = [1,+\infty) =$ Im f.

Veamos las gráficas de ambas:

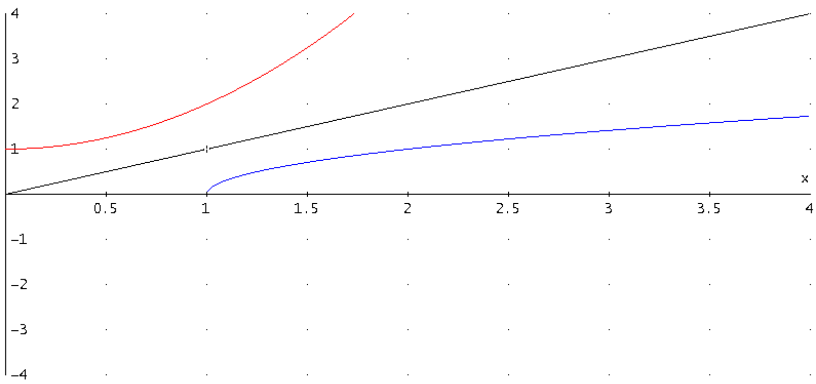


Figura 4

Función e inversa

Obsérvese que las gráficas de ambas son simétricas respecto a la recta y = x.

PERIODICIDAD

Definición:

"Se dice que una función f es periódica en cierto intervalo I, con período T≠ 0, sí y sólo

- El ejemplo más elocuente de funciones periódicas lo constituyen las funciones trigonométricas.
- Si una función es periódica con período T, cualquier múltiplo de T, también es período de dicha función.
- El gráfico de las funciones periódicas se repite idénticamente en cada intervalo de amplitud T.

Ejemplo:

1) Representar gráficamente y = sen x

Del nivel precedente se conoce perfectamente por el lector la gráfica de esta función en cualquier intervalo. Observe cómo se repite el gráfico en cada intervalo de amplitud 2π.

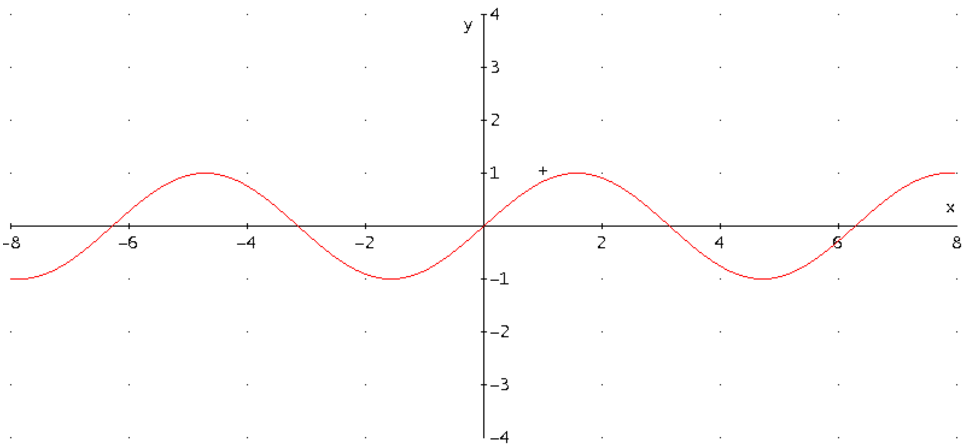


Figura 5

y=sen x

2) Representar la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$ tal que f(x+2k) = f(x) para todo k entero.

Se trata de una función periódica con T = 2 definida por tramos.

Cuando estudiemos "Límite y Continuidad de funciones", veremos que a este tipo de funciones se les da el nombre de seccionalmente continuas en algún intervalo. Este concepto será definido rigurosamente entonces.

Gráfica de la función f definida por tramos como se describe arriba y periódica T = 2.

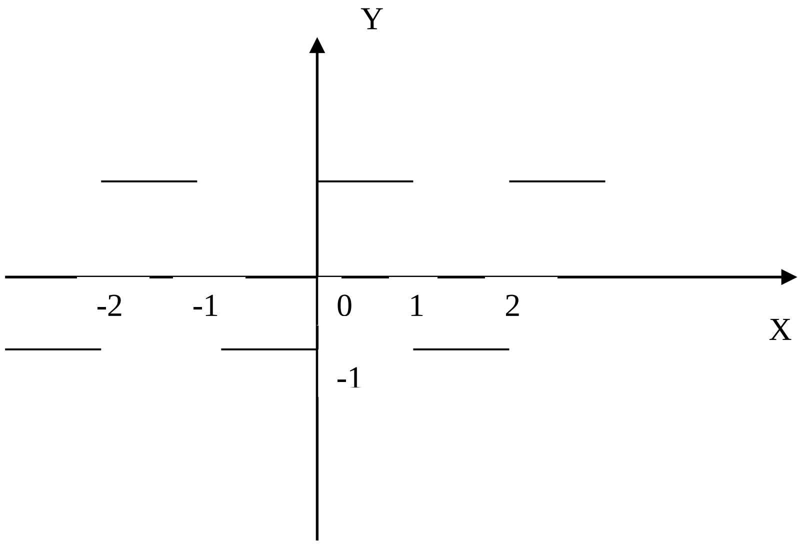


Figura 6

.

Gráfica de la función f definida por tramos y periódica T=2

Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones reales de una variable real. Se define:

a) función suma como (f + g)(x) = f(x) +g(x)

b) función producto: (f.g)(x)=f(x).g(x)

c) función cociente: (f/g)(x) = f(x) / g(x) siempre que g(x) ≠ 0.

Entre todas las operaciones entre funciones, la Composición tiene un rol protagónico predominante.

Definición

Sean f y g dos funciones tales que f: A ----------- B   y g: C --------- E, de tal modo que cada x de A tiene una imagen f(x) en B tal que está en el dominio de C, es decir, de modo tal que: $\mathbf{Im}\, f \cap dom g \neq \varnothing$.

Entonces se define la compuesta de g con f de la siguiente forma:

$$(gof)(x) = g[f(x)]$$

En la práctica es bien sencillo determinar la expresión de la compuesta de dos funciones teniendo en cuenta la definición dada arriba.

La primera función que se aplica es la segunda que se escribe llamada función interna y la otra que es la primera que se escribe es la última que se aplica, y se llama externa.

Acerca del dominio de la función compuesta.

La forma más sencilla de determinar el dominio de una compuesta es aplicando el siguiente recurso:

$$\mathbf{dom(g\ o\ f) = domf \cap dom(g\ o\ f)},$$

donde se concluye que es el conjunto intersección del dominio de la interna con el dominio de la expresión analítica que representa a la función compuesta.

Si se tratara de tres funciones f, g,h entonces: $(f\ o\ g\ o\ h)(x) = f\{g[h(x)]\}$, en este caso nótese que la primera en aplicarse es “h” ésta es la interna, “g” es la segunda en aplicarse, es la intermedia y f que es la primera que aparece en la expresión es la última en aplicarse y es la externa.

Por reiteración, se pueden componer cualquier cantidad de funciones.

Los interesados pueden adquirir habilidades manipulativas en tal sentido, proponiéndose la tarea de componer varias funciones entre sí. (consultar spivak, tomo i).

También es una tarea interesante la composición de una función consigo misma.

¡!!!INTÉNTELO!!!!

Ejemplo

Dadas las funciones. $\mathbf{f(x) = x^3 + 2x + 1}$

$\mathbf{g(x) = sen\ 2x.}$

Determinar las expresiones para: a) (f o g) (x)

b) (g o f) (x)

SOLUCIÓN:

a) $(f\ o\ g)(x) = f[g(x)] = f[sen 2x] = (sen 2x)^3 + 2(sen 2x) + 1$

b) $(g\ o\ f)(x) = g[f(x)] = g[x^3 + 2x + 1] = sen 2(x^3 + 2x + 1)$

Nótese que en todos estos dos casos es fácil comprender que el dominio de esas funciones compuestas es todo R.

Es fácil apreciar, que la composición de funciones NO ES CONMUTATIVA.

Sin embargo, se puede comprobar que sí es ASOCIATIVA, por tanto se cumple que:

$$[f\ o\ (g\ o\ h)](x) = [(f\ o\ g)\ o\ h](x)$$

Ya habíamos planteado que la compuesta de una función f (biyectiva) con su inversa f^{-1} es igual al argumento de dicha función, es decir, se cumple que:

$$(f\ o\ f^{-1})(x) = (f^{-1}\ o\ f)(x) = x$$

CAPÍTULO II.- ESTUDIO DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

Función polinomial

Definición

La función $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ se denomina **función polinomial de *n*–simo grado.** También se hará referencia a $P(x)$ como **un polinomio de grado *n*.** Los números a_n, a_{n-1},..., a_1, a_0 se llaman **coeficientes del polinomio** y pueden ser reales o complejos. El dominio de la función puede ser el conjunto de los números reales o el conjunto de los números complejos.

Al igual que vimos con las funciones lineales y cuadráticas que no son más que casos particulares de la función polinomial, las soluciones de la ecuación $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ las llamamos **raíces de la función *P*, o CEROS DE LA FUNCIÓN POLINOMIAL.** Si los coeficientes de la función son reales y la raíz también, tendríamos un intercepto con el eje x de la gráfica de la función.

Ejemplo

Consideremos las funciones: $P(x) = x^3 - 8$; $H(x) = \frac{x+1}{x^2 - 1}$ y $Q(x) = \frac{x^2 - 4}{x+2}$

La función P es una función polinomial de grado 3. H y Q no son polinomiales.

La función $Q(x) = \frac{x^2 - 4}{x+2}$ no es polinomial pues la cancelación del factor $x + 2$ no es válida para $x = -2$.

En cuanto a sus dominios:

Dominio de $P = R$

Dominio de $H = \{x \in R : x \neq \pm 1\}$

Dominio de $Q = \{x \in R : x \neq -2\}$

Las raíces de la función *P* vienen dadas por:

$$x^3 - 8 = 0$$

Factorizando: $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$

$$x = 2 \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

y su intercepto con eje *x* es *x* = 2 que es la única raíz real. Para calcular el intercepto con el eje *y* basta con evaluar el polinomio en cero, por lo que sería *y* = – 8.

Operaciones con funciones polinómicas

Las operaciones entre polinomios se realizan de manera muy sencilla y es objeto de estudio en los cursos de álgebra elemental en la enseñanza media.

A modo de recordatorio, hallaremos la suma, diferencia, producto y cociente de dos polinomios.

Sean

$P(x) = 6x^3 - 11x^2 + 12x - 17$ y $Q(x) = 3x^2 - x + 4$

Hallemos:

a) $P + Q$
b) $P - Q$
c) $P.Q$
d) P/Q

Solución:

a) $(P+Q)(x) = 6x^3 - 8x^2 + 11x - 13$

b) $(P-Q)(x) = 6x^3 - 14x^2 + 13x - 21$

c) $(P.Q)(x) = (6x^3 - 11x^2 + 12x - 17)(3x^2 - x + 4)$

$$= 18x^5 - 6x^4 + 24x^3 - 33x^4 + 11x^3 - 44x^2 + 36x^3 - 12x^2 + 48x - 51x^2 + 17x - 68$$

$$= 18x^5 - 39x^4 + 71x^3 - 107x^2 + 65x - 68 .$$

d)

$$\begin{array}{lrl|ll}
\text{Dividendo} \longrightarrow & 6x^3 - 11x^2 + 12x - 17 & & \underline{3x^2 - x + 4} & \longleftarrow \text{Divisor} \\
& \underline{6x^3 - \ \ 2x^2 + \ \ 8x \qquad} & & 2x - 3 & \longleftarrow \text{Cociente} \\
& -9x^2 + \ \ 4x - 17 & & & \\
& \underline{-9x^2 + \ \ 3x -} \ 12 & & & \\
& x - 5 & \longleftarrow & & \text{Resto}
\end{array}$$

Luego podemos concluir que:

$$6x^3 - 11x^2 + 12x - 17 = (3x^2 - x + 4)(2x - 3) + x - 5$$

De donde podemos ver que dividir un polinomio $P(x)$ por otro polinomio $B(x)$ cuyo grado sea menor o igual que el de $P(x)$, es hallar otros dos polinomios $C(\text{x})$ y $R(\text{x})$ que cumplan las siguientes condiciones:

1. $P(x) = B(x).C(x) + R(x)$.
2. Grado de $R(x)$ menor que el grado de $B(x)$.

El polinomio $P(x)$ se llama dividendo, $B(x)$ el divisor, $C(x)$ cociente y $R(x)$ el resto. Cuando el resto es cero se dice que la división es exacta y se tiene que $P(x) = B(x).C(x)$.

División sintética (Regla de Ruffini, también con esta denominación)

Especial atención merece la división de un polinomio por un binomio de la forma x – a o sea P(x) = $B(x)(x - a) + R(x)$ donde $R(x)$ será un polinomio de grado cero. En este caso el proceso se simplifica porque se puede omitir la escritura de la parte literal de todos los términos, limitándonos a escribir los coeficientes en forma ordenada. El proceso entonces se denomina división sintética.

Ejemplo:

Determine el cociente y el resto que se obtiene al dividir:

1. $4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 1$ por $x - 5$.

2. $5x^4 - 2x^2 - 3$ por $x - 1$.

Solución:

1.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 4 & 2 & -6 & -5 & 1 \\
5 & & 20 & 110 & 520 & 2575 \\
\hline
 & 4 & 22 & 104 & 515 & 2576
\end{array}
$$

Donde $Q(x) = 4x^3 + 22x^2 + 104x + 515$ y $R(x)$ = 2576.

2.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 5 & 0 & -2 & 0 & -3 \\
1 & & 5 & 5 & 3 & 3 \\
\hline
 & 5 & 5 & 3 & 3 & 0
\end{array}
$$

De donde $Q(x) = 5x^3 + 5x^2 + 3x + 3$ y R(x) = 0.

La división sintética es un recurso muy interesante para evaluar polinomios. Es resultado se llama teorema del residuo:

Teorema del resto

Si R es el resto después de dividir el polinomio $P(x)$ entre $x - a$, entonces $P(a) = R$.

La demostración es muy sencilla. Si $Q(x)$ es el cociente de dividir $P(x)$ entre $(x\text{-}a)$ y R es el residuo, se tiene que:

$$P(x) = (x - a).Q(x) + R$$

Como esta igualdad es cierta para todo valor de x tendrá que cumplirse para $x = a$. Haciendo x = a en toda la ecuación se tiene:

$$P(a) = (a - a).Q(a) + R$$

$$P(a) = R$$

lo que demuestra el teorema.

Ejemplo

Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 8.$ El valor de $P(2)$ puede obtenerse hallando el resto de la división por x + 2:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -2 & 8 \\ -2 & & -2 & 10 & -16 \\ \hline & 1 & -5 & 8 & -8 \end{array}$$

Así que $P(2) = -8$

Esta forma de evaluar el polinomio es mucho más económica en cuanto a la cantidad de operaciones aritméticas que se necesita.

Graficación de funciones polinómicas

Para obtener la gráfica de una función polinómica podemos usar el método estudiado y para obtener los puntos podemos calcularlos haciendo uso de la división sintética. Sin embargo, resulta muy útil tener en cuenta las siguientes características de las funciones polinómicas:

- En la función $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ para valores de *x* muy grandes en valor absoluto, es decir, muy alejados del origen, el término principal: $a_n x^n$ predomina ampliamente por sobre los demás. Nótese que, si a_n es positivo, entonces este término tiende a infinito a medida que *x* tiende a infinito. Cuando *x* tiende a menos infinito, el comportamiento depende de si *n* es par o impar. Si *n* es impar, el polinomio tiende a menos infinito pero si *n* es par el polinomio tiende a infinito. Claro que si a_n es negativo, todo esto cambia. No hay que memorizar esta regla, en cada caso debe razonarse.

- La gráfica de la función es continua (sin saltos) y suave (sin picos). (Esto se demuestra en Cálculo Diferencial)
- Como consecuencia de lo anterior, cuando el grado del polinomio es impar, como va de menos infinito a más infinito o viceversa, y no tiene saltos, tiene obligatoriamente que cortar al eje *x*. Es decir, que los polinomios de grado impar poseen por lo menos una raíz real (intercepto con el eje *x*).
- La gráfica puede cortar al eje *x*, a lo más, en *n* puntos (grado del polinomio).
- La gráfica puede tener, a lo más, $n - 1$ puntos de tangente horizontal (se llaman puntos estacionarios). (Esto se demostrará en Cálculo Diferencial).

Ejemplo

Graficar la siguiente función: $g(x) = x^3 - 5x$

Solución:

Antes de evaluar puntos, se puede analizar que:

- Cuando *x* tiende a $-\infty$ el término predominante tiende a $-\infty$.
- Para *x* tendiendo a infinito este término tiente a infinito.
- La gráfica tiene que cortar al eje *x* en al menos un punto.
- Los interceptos con el eje *x* en este caso se pueden calcular fácilmente:

$$x^3 - 5x = 0$$

Esto es: $x(x^2 - 5) = 0$

Intercepto: $x = 0, \quad x = \sqrt{5}, \quad x = -\sqrt{5}$

- La gráfica no puede tener más de dos puntos estacionarios.
- El intercepto con el eje y es $y = 0$
- La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas ya que:

$$g(-x) = (-x)^3 - 5(-x) = -x^3 + 5x = -g(x)$$

En este caso, con los datos hallados no es necesario evaluar en ningún otro punto para tener una gráfica bastante aproximada. Si se quiere un poco más de precisión, se puede evaluar en dos puntos intermedios entre los interceptos, por ejemplo, en $x = 1$ y $x = 2$.

P(1) = –4; $P(2) = -2$

La gráfica es:

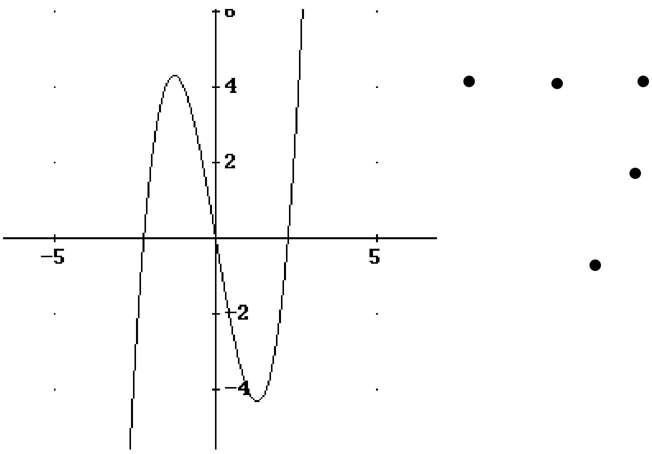


Figura 7

Gráfica evaluada en dos puntos intermedios entre los interceptos

Raíces de un polinomio

El cálculo de las raíces de un polinomio es un importante problema que se presenta con gran frecuencia. El problema puede ser muy complicado pero los teoremas que siguen permiten a veces obtener información sin un gran esfuerzo.

Teorema de factorización

Si r es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces $x - r$ es un factor de $P(x)$. Por el contrario, si $x - r$ es un factor de $P(x)$, entonces r es una raíz de $P(x)$.

El teorema de la factorización es un procedimiento directo para comprobar si $(x - r)$ forma parte de la descomposición factorial de un cierto polinomio. El teorema no dice, sin embargo, como obtener valores adecuados de r. Más adelante se obtendrá algunas reglas sencillas.

Teorema Fundamental del Álgebra

En el estudio que hemos hecho hasta el momento de los polinomios hemos visto que los de primer grado siempre tienen una raíz y los de segundo grado también tienen raíces. La generalización de este hecho no es trivial y fue demostrada por Gauss en 1797 como parte de su tesis de graduado (con solo 20 años). La demostración no la realizaremos, pero pudiera consultarse en libros de Álgebra Superior.

Teorema (polinomios con coeficientes complejos en general)

Toda ecuación algebraica con coeficientes complejos $P(x) = 0$ tiene exactamente "n" raíces complejas (no necesariamente desiguales)

- Si el polinomio tiene m raíces iguales a r entonces r se denomina **raíz de multiplicidad *m*** y por tanto en su descomposición factorial aparece el factor $(x-r)^m$.

Este importante resultado constituye uno de los mayores logros de la investigación algebraica.

Polinomios con coeficientes reales

En los casos que veremos en este texto y en la mayor parte de las aplicaciones, los coeficientes de los polinomios son números reales. En este importante caso se cumple el siguiente teorema que veremos sin demostración.

Teorema

Si un polinomio con coeficientes reales tiene una raíz compleja su conjugado también es una raíz del polinomio.

- El hecho de que en los polinomios con coeficientes reales, las raíces complejas aparezcan por pares tiene muchas consecuencias interesantes. Una de ellas es:

Corolario del teorema fundamental del Álgebra

Toda ecuación algebraica con coeficientes reales de grado impar, P(x) = 0, tiene obligatoriamente, al menos una raíz real.

Nota: El estudio de un teorema para el caso de coeficientes enteros (raíces racionales) lo dejamos como lectura opcional.

Función racional

Definición:

Se dice que *R(x)* es una función racional si $\boldsymbol{R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}}$ donde P(*x*) es un polinomio cualquiera y Q(*x*) es un polinomio que no sea el polinomio nulo. El dominio de *R* es el conjunto de todos los números reales tales que $\boldsymbol{Q(x)\neq 0}$.

Ejemplos:

$f(x)=\frac{x^2+x-3}{x+1}$ $\quad g(x)=\frac{x}{x^3+4x^2-x+4}$ $\quad h(x)=(x+3)^2$ $\quad p(x)=\frac{1}{x+3}$

- Se supone que, a menos que se advierta lo contrario, los polinomios P(x) y Q(x) no poseen factores comunes, esto es, que no pueden ambos anularse para el mismo valor de x, pero teóricamente, esa posibilidad siempre existe. Por tanto, sólo consideraremos para este concepto fracciones IRREDUCIBLES.
- Caso particular: como el polinomio del denominador puede ser una constante (grado 0), todas las funciones polinomiales se pueden considerar como funciones racionales.

Comportamiento de la función en los ceros de P(*x*) y Q(*x*)

Es bastante evidente que:

1. Si Q(a) = 0, (independientemente de que P(a) sea o no cero) entonces a no pertenece al dominio de R, porque la división por cero no está permitida. Para $x = a$ no existe la función.
2. Si P(a) = 0 y Q(a) $\neq$ 0, entonces $x = a$ es un cero de la función R. En el punto $x = a$ la gráfica de R corta al eje de las x.
3. Si Q(a) = 0 y P(a) $\neq$ 0, entonces la función R crece indefinidamente en valor absoluto cuando x se acerca hacia a. Puede crecer hacia valores grandes y positivos o hacia valores grandes negativos, o de formas diferentes a cada lado de $x = a$.
4. A estos valores que anulan el denominador sin que anulen simultáneamente el numerador de la función racional, se les denomina POLOS de la función racional.
5. Por tanto, los POLOS de una función racional, no pertenecen a su dominio.
6. Así podríamos formalizar diciendo que:

$$\boldsymbol{domR} = \Re - \{\boldsymbol{POLOS\ de\ R}\} = \Re - \{\boldsymbol{x} \in \Re \boldsymbol{:} \boldsymbol{Q(x)} = \boldsymbol{0}\}$$

Ejemplo

Analizar el comportamiento de la función racional $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ en la vecindad de $x = 1$.

Solución:

a) Para valores de *x* próximos a 1 pero mayores que 1, la función toma valores positivos que pueden sobrepasar a cualquier cantidad fijada de antemano tomando una *x* suficientemente próximo a 1. Esto se escribe:

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^{+}$$

b) Para valores de *x* próximos a 1 pero inferiores a él, el denominador de la fracción es pequeño y negativo, así que *f*(*x*) toma valores negativos de valor absoluto cada vez mayor a medida que *x* se aproxima hacia 1 por la izquierda. Esto se simboliza:

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^{-}$$

La figura muestra la gráfica de *f* en las proximidades de *x* = 1:

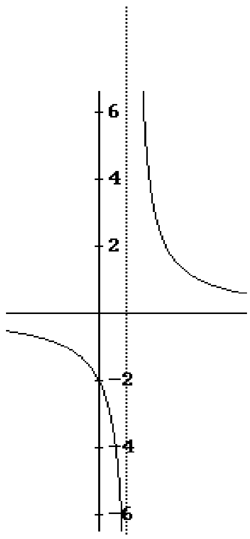


Figura 8

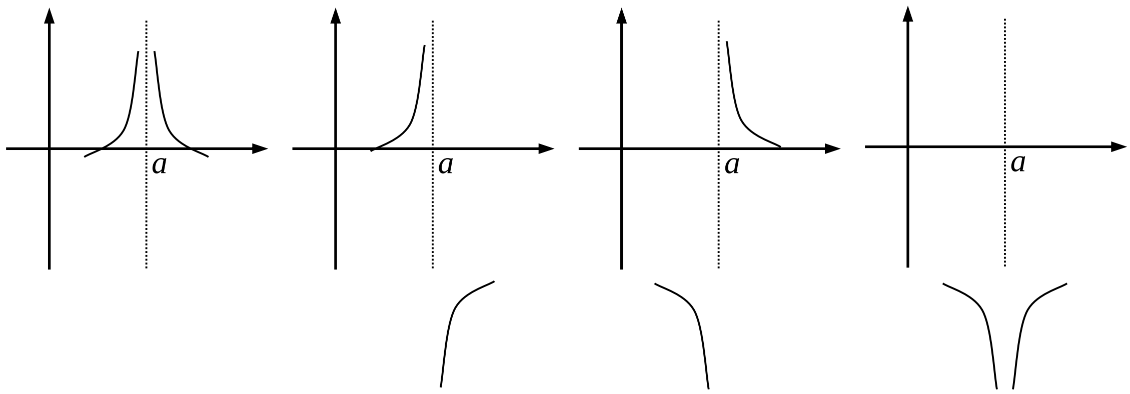
Gráfico en una vecindad

Asíntotas verticales y asíntotas horizontales

Definición:

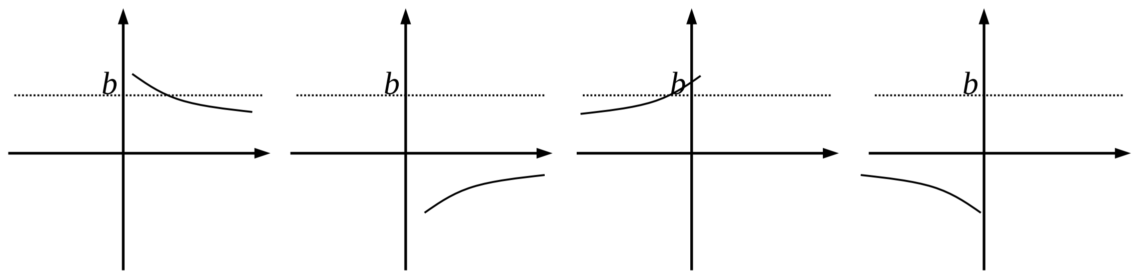
La recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de $y = f(x)$ si $f(x)$ aumenta o disminuye sin límite cuando x se aproxima hacia a desde la derecha o desde la izquierda. De manera simbólica:

$$f(x) \to \infty \quad \text{ó} \quad f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to a^{+} \quad \text{ó} \quad x \to a^{-}$$



La recta $y = b$ es una asíntota horizontal para la gráfica de $y = f(x)$ si $f(x)$ se aproxima hacia b a medida que x aumenta sin límite o disminuye sin límite. De manera simbólica:

$$f(x) \to b \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \quad \text{ó} \quad x \to -\infty$$



Las figuras muestran las posibles posiciones relativas entre la función y la asíntota.

- Destacar que una función puede poseer muchas asíntotas verticales pero sólo una horizontal hacia la derecha y otra horizontal hacia la izquierda (que, por lo general, coinciden) ya que una función solo puede tomar un valor para cada *x*.

Graficación de funciones racionales

La gráfica de una función refleja todo nuestro conocimiento acerca de ella, de ahí la importancia de graficar una función. En el caso de las funciones racionales, los elementos más importantes a tomar en cuenta a la hora de construir su gráfica son:

- Las funciones racionales son continuas y suaves, salvo en los puntos donde se anula el denominador.
- Los interceptos con el eje *x* y el intercepto con el eje *y*.
- El dominio de la función (todos los reales excepto los ceros del denominador).
- Las asíntotas verticales (ceros del denominador que no anulan el numerador).
- El comportamiento asintótico de la función (términos predominantes del numerador y denominador).
- Esquema de signos de la función
- Simetría de la función.

En general, con estos elementos se puede trazar una gráfica bastante aproximada de la función racional. Si esto no fuera suficiente, se puede evaluar la función en algunos valores importantes de *x*.

Ejemplo

Graficar la función: $p(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ (Ejercicios 3-4, página 262, # 34)

Solución:

Dominio = $\{x \in R : x \neq \pm 1\}$

Interceptos: (0, 0)

Simetría: $p(-x) = \dfrac{-x}{1-(-x)^2} = \dfrac{-x}{1-x^2} = -p(x)$. La gráfica es simétrica respecto al origen.

Asíntotas verticales: $x = -1$ y $x = 1$

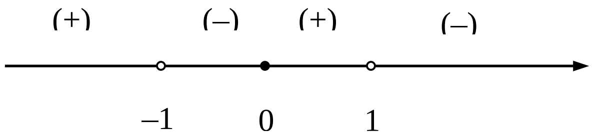
Comportamiento asintótico: Cuando $x \to \infty$, $p(x) \to 0$

Cuando $x \to -\infty$, $p(x) \to 0$

Esquema de signos:

Ceros del numerador: $x = 0$

Ceros del denominador: $x = 1$ y $x = -1$



Con esta información se puede construir la gráfica a mano alzada. La que sigue se realizó en Derive:

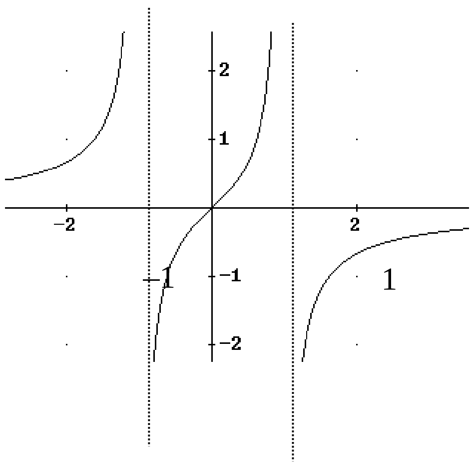


Figura 9

Gráfico en Derive

Las funciones exponenciales

Antes de comenzar el estudio de estos tipos de funciones denominadas funciones trascendentes según vimos en el curso RASA cuando nos referimos a la clasificación de las ecuaciones matemáticas, es menester que el estudiante, haga un breve repaso a los aspectos relativos a función inversa y sus diferentes aspectos esenciales, que se discutieron en la conferencia anterior No. 1, para que pueda comprender la relación entre las exponenciales y las logarítmicas como funciones trascendentes

Definición:

Una función exponencial es una función del tipo $f(x) = b^x$, donde b es una constante positiva. Las funciones exponenciales se evalúan muy fácilmente para valores enteros de x. Para valores racionales, utilizando algunos artificios algebraicos. Para valores irracionales, hallar su valor es muy difícil y se necesita recurrir a tablas, calculadoras y asistentes matemáticos. En cursos más avanzados (Matemática 3) se verán los métodos matemáticos que se requieren para estas evaluaciones.

Ejemplo

Consideremos la función exponencial de base 2: $f(x) = 2^x$. Hallemos $f(5)$, $f(-3)$ y $f(\frac{2}{3})$

Solución:

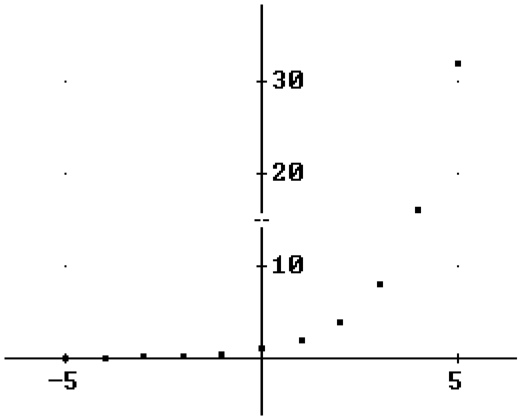
$f(5) = 2^5 = (2)(2)(2)(2)(2) = 32$

$f(-3) = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = 0.125$

$f(\frac{2}{3}) = 2^{2/3} = (2^2)^{1/3} = 4^{1/3} = \sqrt[3]{4} = 1.587401051$

A continuación se muestra una tabla construida para valores enteros de x entre –5 y 5 y se muestran en una gráfica los puntos correspondientes:

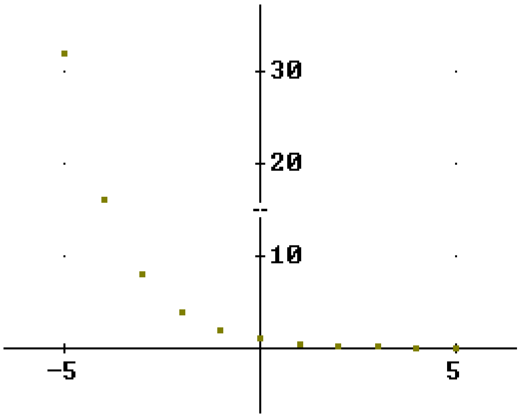
x	2^x
-5	0.03125
-4	0.0625
-3	0.125
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32



Ejemplo   Para la exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ la tabla y la gráfica que resultan son:

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25
3	0.125
4	0.0625

5 0.03125



Como se ve, cuando la base es mayor que 1, la función exponencial es creciente, pero si es menor que 1, la función es decreciente y la gráfica lo muestra.

Propiedades de la función $f(x) = b^x$

Del análisis realizado hasta ahora se puede concluir que:

1. Como $b^0 = 1$, Todas las gráficas intersecan al eje vertical en $y = 1$, es decir, pasan por (0, 1)
2. Todas las gráficas son continuas.
3. El eje x es una asíntota horizontal (hacia la izquierda si $b > 1$; hacia la derecha si $b < 1$) salvo el caso en que $b = 1$.
4. Si $b > 1$ la función es creciente.
5. Si $b < 1$ la función es decreciente.
6. Salvo el caso trivial en que $b = 1$, la función es uno a uno, es decir, inyectiva.

Propiedades algebraicas de la función exponencial

Algunas de estas propiedades han sido objeto de estudio en cursos anteriores y se incluyen aquí a modo de recuerdo. Se supone siempre que las bases *a* y *b* son ambas positivas y diferentes de 1.

1. Leyes de los exponentes:

$a^x a^y = a^{x+y}$	Para multiplicar potencias de igual base, se suman los exponentes
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	Para dividir potencias de igual base, se restan los exponentes
$(a^x)^y = a^{xy}$	Para elevar una potencia a un exponente, se multiplican los exponentes
$(ab)^x = a^x b^x$	La potencia de un producto es el producto de las potencias.
$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	La potencia de un cociente es el cociente de las potencias.

2. $a^x = a^y$ si y solo si $x = y$ La función exponencial es inyectiva

1. Para $x \neq 0$, entonces $a^x = b^x$ si y solo si $a = b$
2. Las exponenciales solo se cortan en $x = 0$

Aplicaciones de la función exponencial

La función exponencial aparece ligada a múltiples e importantes problemas. Algunos de ellos son:

- El crecimiento de una población de animales (incluso, hombres) cuando los recursos de subsistencia son ilimitados.
- La desintegración de materiales radiactivos.
- El enfriamiento o calentamiento de un cuerpo debido a su medio ambiente.
- La carga de un condensador sometido a voltaje constante.
- La descarga de un condensador a través de una resistencia.
- La velocidad con que se propaga una enfermedad.
- La velocidad con que corre un rumor.

La razón de por qué esto sucede se verá en cursos posteriores, sobre todo en Matemática 3 cuando se estudien las ecuaciones diferenciales. Por el momento, es importante que el alumno pueda operar con estos modelos de manera adecuada.

Ejemplo

En algunas poblaciones el número de individuos crece en forma exponencial. Muchas veces se utiliza la función:

$$P(t) = P_0 2^{t/d}$$

Donde *P*: Número de individuos en el momento *t*

P_0: Número de individuos en el momento inicial

d: Tiempo que tarda en duplicarse la población (tiempo de duplicación)

Por ejemplo, si Kenia tiene actualmente aproximadamente 30 millones de habitantes y el tiempo de duplicación es de 19 años, ¿qué población habrá dentro de 10 años si la tasa de crecimiento no cambia?

Solución:

Si *P* se mide en millones y *t* en años, la función adecuada es: $P(t) = 30 \bullet 2^{t/19}$, para $t = 10$ será:

$P(10) = 30 \bullet 2^{10/19}$ =(30)(2) $^{0.526}$ = (30)(1.4402) = 43.2 millones de habitantes

El número *e*

Este importante número está asociado a tantos problemas teóricos y aplicados que, después de la constante π = 3.1415926..., es el número más importante de toda la Matemática. Esta constante fue descubierta por el matemático alemán Leibniz en 1690 (que la llamó b) y fue llamada *e* por Euler 37 años más tarde. Euler descubrió interesantes propiedades de este número y por eso muchos lo llaman, erróneamente, constante de Euler. La constante de Euler es otro número importante que se verá en el estudio de las series, en Matemática 3.

El número *e* está vinculado a la función $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ cuando *m* toma valores muy grandes. Nótese que cuando m es muy grande, la base de la potencia se hace muy próxima a 1 pero a su vez el exponente crece, de modo que es difícil predecir qué sucede. Vamos a verlo experimentalmente. Construyamos una tabla de dicha función para valores de m más y más grandes. Vamos a hacerlo con Derive para ahorrarnos los cálculos. Usamos el comando:

VECTOR ([m,(1+1/m)^m],m,10,100,10)

m	$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$
10	2.593742460
20	2.653297705
30	2.674318775
40	2.685063838
50	2.691588029
60	2.695970139
70	2.699116370
80	2.701484940
90	2.703332461
100	2.704813829

Como se observa, la función se acerca cada vez más a un valor fijo al cual nunca llega. Desde el siglo XVII se probó que este valor fijo es, con 15 cifras exactas:

2,718281828459045...

y a ese número se le designó con la letra *e* inicial de la palabra "exponencial".

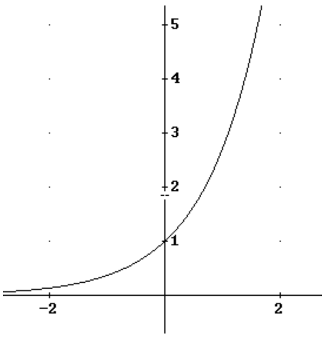
El número *e* aparece en múltiples cuestiones teóricas y prácticas, pero nosotros lo vamos a emplear, en particular, como base de una función exponencial, la función:

$f(x) = e^x$

De todas las funciones exponenciales, esta de base *e* es la más importante. Las razones se comprenderán en Cálculo Infinitesimal (Tema 4, Matemática 1). Por esta razón, cuando las personas se refieren a la función exponencial, sin indicar la base, se sobreentiende que es la exponencial de base *e*. Como *e* es mayor que 1, su gráfica es creciente y presenta todas las características ya vistas para las funciones exponenciales. A continuación mostramos la gráfica construida en Derive:

Figura 10

Gráfica construida en Derive



Como se observa, es una función que crece con gran rapidez cuando *x* toma valores positivos y también decrece con gran rapidez a medida que *x* va tomando valores negativos alejados del origen.

Esta función aparece en todas las calculadoras científicas y en todos los lenguajes de programación, casi siempre designada como exp(*x*) y también está tabulada desde hace siglos con gran precisión.

EXPRESANDO b^x EN TÉRMINOS DE e^x

Observando la gráfica de e^x se nota que esta función toma todos los valores reales positivos. Como hemos supuesto que $b > 0$, siempre existirá un número, llamémosle *k* tal que

$$e^k = b$$

Observe que: si b > 1, entonces k es positivo

Si $b < 1$, entonces k es negativo

Ahora la función b^x la podemos escribir: $b^x = (e^k)^x = e^{kx}$. En la práctica, raras veces se emplean otras exponenciales que no sea la de base *e*.

La función logarítmica

Definición

Sea *b* un número positivo y diferente de 1. La función $\log_b x$ se define como la función inversa de b^x, es decir:

$$y = \log_b x \quad \text{equivale a} \quad x = b^y$$

En palabras: El logaritmo base *b* del número *x* es el exponente al que hay que elevar a *b* para obtener *x*.

Dominio, rango y gráfica de la función logarítmica

De la definición resulta claro que *x* solo podrá tomar valores positivos ya que b^y siempre es mayor que cero. El rango se verá más fácilmente al analizar la gráfica de la función. Como las funciones exponencial y logaritmo de base *b* son inversas, sus gráficas deben ser simétricas una a otra respecto a la bisectriz del primer cuadrante. La gráfica va a depender de si la base *b* es menor o mayor que 1. Veamos ambos casos:

Base *b* mayor que 1

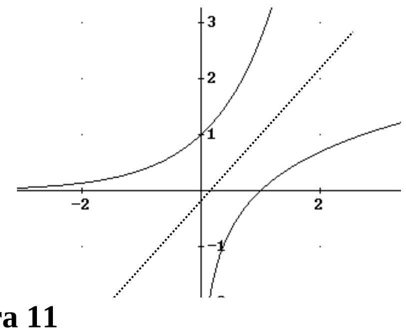
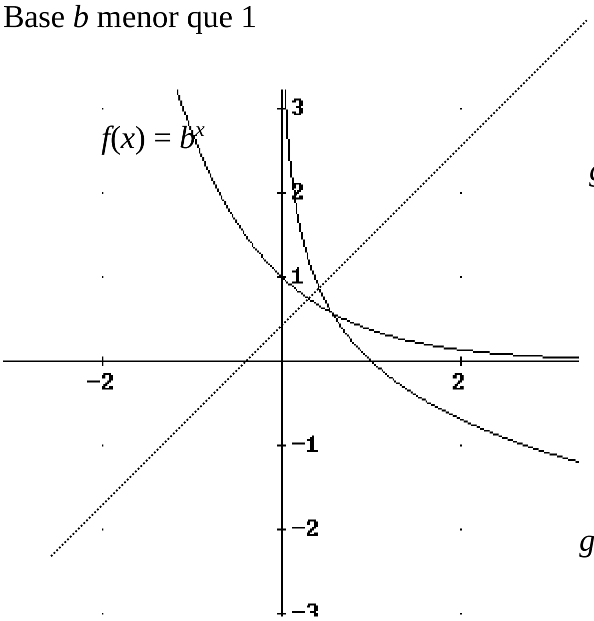


Figura 11

Base b mayor que 1

$f(x) = b^x$

Base *b* menor que 1



$g(x) = \log_b x$

$g(x) = \log_b x$

Figura 12

Base b menor que 1

- Destacar el primer caso ya que los sistemas

En resumen, la función logarítmica **con base *b* > 1** posee las siguientes propiedades:

- Está definida para $x > 0$, es decir, su dominio es R^+
- Toma el valor 0 para $x = 1$.
- Es una función creciente que toma valores negativos para $0 < x < 1$ y positivos para $x > 1$.
- Crece rápidamente para las $x < 1$ y muy lentamente para las $x > 1$.
- Su rango son todos los números reales.
- La función es continua en todo su dominio.

Propiedades algebraicas de los logaritmos

Todas estas propiedades son consecuencia inmediata de propiedades análogas de las exponenciales y se demuestran de esa forma.

Sean b, M y N números reales positivos, b diferente de 1 y p y x números reales. Entonces:

1. $\log_b 1 = 0$ El logaritmo de 1 siempre es 0
2. $\log_b b = 1$ El logaritmo de la base siempre es 1
3. $\log_b b^x = x$ Los efectos de la exponencial y el logaritmo se anulan entre sí.
4. $b^{\log_b x} = x$ Los efectos de la exponencial y el logaritmo se anulan entre sí.
5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$ El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos.
6. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$ El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos.
7. $\log_b M^p = p \log_b M$ El logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base.
8. $\log_b M = \log_b N$ si y solo si M = N El logaritmo es una función inyectiva.

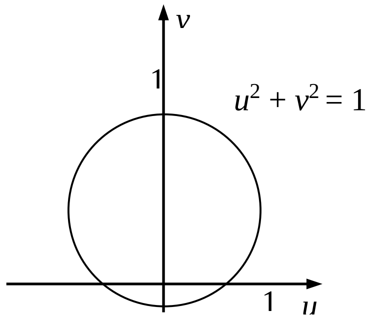
- Comentar someramente las razones de estas propiedades sin entrar en una demostración detallada.

Funciones trigonométricas circulares

El círculo unitario

Definición

El círculo unitario es un círculo con centro en el origen de coordenadas y radio 1. Si los ejes los llamamos u y v su ecuación será: $u^2 + v^2 = 1$. A los puntos del círculo unitario se les llama puntos circulares.



- Nótese que, en rigor, debería llamarse **circunferencia** unitaria y no **círculo** unitario.

Identidades trigonométricas básicas

- Las identidades que siguen son consecuencia inmediata de las definiciones de las funciones circulares.
- En todos los casos las identidades tienen su dominio natural de definición.
- En el texto les asignan un nombre a cada grupo pero no merece la pena.
- Todas estas identidades hay que recordarlas de memoria y además saberlas demostrar.

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Ejemplo

Utilizando las identidades básicas, halle las demás funciones circulares si se sabe que:
$\sec x = 2$ y $\tan x < 0$

Solución

Como $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ entonces $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$

Como $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ entonces $\tan x = \pm\sqrt{\sec^2 x - 1} = \pm\sqrt{3}$.

Pero tan x < 0, así que, $\tan x = -\sqrt{3}$

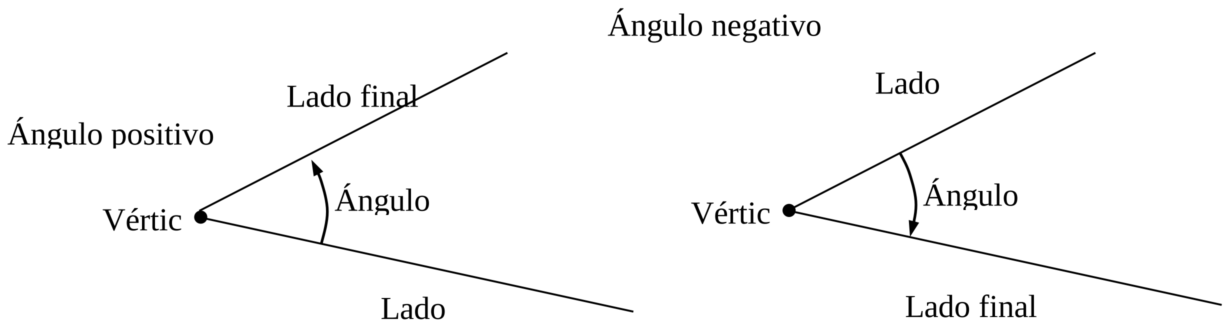
Como $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ entonces: $\operatorname{sen} x = \tan x \cos x = \dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Como $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ entonces: $\cot x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Como $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ entonces: $\csc x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Ángulo

- El concepto de ángulo es muy primario para definirlo. En lugar de ello lo que se hace es suponerlo como intuitivo y dar la terminología asociada con el concepto.



- Recordar brevemente los conceptos de ángulo agudo, obtuso, llano, recto, coterminal.

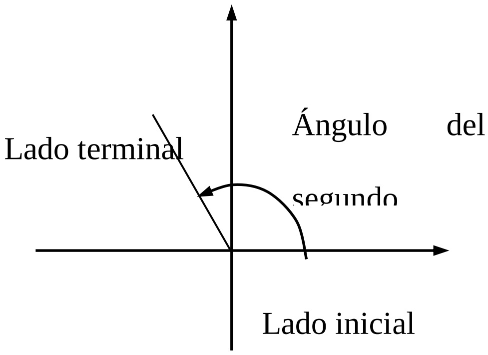
Ángulos en posición estándar o normal

Es un ángulo colocado en un sistema cartesiano de modo que:

- El vértice esté en el origen de coordenadas
- El lado inicial coincida con el semieje horizontal positivo

Una vez que un ángulo está en su forma estándar el mismo se denomina según el lugar donde caiga el lado terminal:

- Ángulo cuadrantal: cuando el lado terminal cae sobre uno de los ejes coordenados
- Ángulo del primer, segundo, tercero o cuarto cuadrante según que su lado terminal caiga en uno de estos cuadrantes



Medida de un ángulo

Como cualquier otra magnitud (longitud, tiempo, masa, volumen, etc.) los ángulos se miden por comparación con ciertos objetos que se toman arbitrariamente como unidad. En el caso de los ángulos, hay varios sistemas de medidas, basados en otras tantas unidades angulares. Las unidades más usadas son el grado y el radián.

Definiciones

-Un **grado** (sexagesimal) es la medida de un ángulo que es $\frac{1}{360}$ de una rotación completa.

Un **radián** es la medida de un ángulo que, colocado con su vértice en una circunferencia, determina un arco de la misma longitud que el radio de la circunferencia.

En la siguiente figura se muestra dos circunferencias una con un ángulo de un grado y otra con uno de un radián:

- Un ángulo de 1 grado es muy pequeño. La esfera del reloj está dividida en 60 pequeños ángulos de 6 grados cada uno. Cada segundo el secundario da un saltito de 6 grados.
- Para medir cuantos radianes tiene un ángulo basta colocar su vértice en una circunferencia y medir la longitud del arco usando como unidad el radio del círculo.
- Como una circunferencia completa mide $2\pi r$, entonces un ángulo de 360º mide 2π radianes, es decir:

$$360^\circ = 2\pi \text{ radianes} = 6{,}2832 \text{ radianes}$$

o lo que es igual: $180^\circ = \pi$ radianes = 3,1416 radianes.

O también: 1 radián = $\frac{180}{\pi}$ grados= 57,29577951 grados

En las aplicaciones más elementales de la geometría, se prefiere el grado. Sin embargo muchas fórmulas geométricas resultan mucho más sencillas cuando el ángulo se mide en radianes.

Por ejemplo: Área de un sector de círculo de radio *r*:

$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$ si el ángulo central del sector (θ) se mide en radianes.

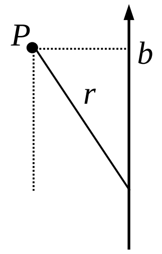
$A = \frac{\pi}{360} r^2 \theta$ si el ángulo central del sector (θ) se mide en grados.

- Un grado se divide en 60 minutos (‘) y un minuto en 60 segundos (“) pero estas unidades solo se emplean en raras ocasiones. Hoy se prefiere trabajar en grados y partes de grado, por ejemplo 34, 25º en lugar de 34º 15’

Definición de las funciones trigonométricas:

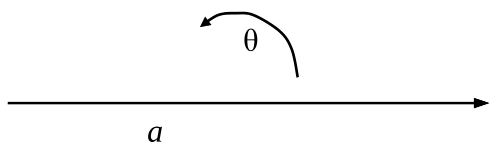
Sea θ un ángulo cualquiera. Sea $P(a, b)$ un punto del lado terminal de θ cuando se coloca en su forma estándar. Sea *r* la distancia de *P* al origen de coordenadas. Entonces se define:

$\text{sen}\theta = \frac{b}{r}$ $\csc\theta = \frac{r}{b}$

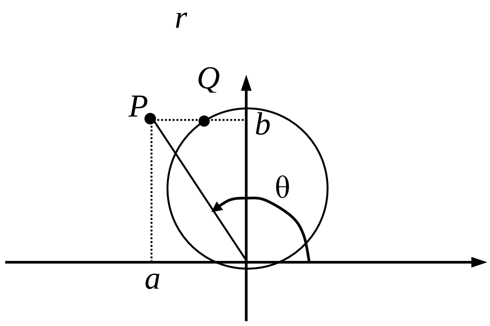


$\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ $\qquad$ $\sec\theta = \dfrac{r}{a}$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ $\qquad$ $\cot\theta = \dfrac{a}{b}$



La equivalencia entre ambas definiciones es bastante evidente. Para verlo, trace un círculo unitario y tome el punto circular Q sobre el lado terminal del ángulo:



Como la definición no especifica qué punto tomar sobre el lado terminal (no es necesario porque la proporción entre a, b y r es la misma) puede tomarse Q en lugar de P. Por otro lado, observe que en este caso como el radio es 1, la longitud x del arco es numéricamente igual a la medida de θ en radianes. Así que, según la definición original:

sen θ = sen x = ordenada de Q, pues Q es un punto circular

Según la definición alterna:

sen θ = $\dfrac{\text{ordenada de } Q}{1}$ = ordenada de Q

Similarmente sucede con las otras cinco funciones.

Funciones trigonométricas de ángulos notables

Los números notables que estudiamos en la clase pasada, corresponden a ángulos notables cuando se trabaja en radianes. Dada la definición, por ejemplo:

sen $\left(\frac{\pi}{6}\, rad\right)$=sen$\left(\frac{\pi}{6}\right)$ donde, el argumento de la primera función es un ángulo y el de la segunda es un número real que representa a un arco de longitud π/6. En realidad este ángulo y este arco están tan estrechamente ligados que suelen confundirse los conceptos pues la única diferencia es la magnitud que representan, no su valor numérico.

IMPORTANTE: Basta sólo saber que dado un punto P en cualquier cuadrante el seno siempre es la ordenada y el coseno la abscisa de dicho punto, para entonces inferir valores y/o signos de las 6 funciones trigonométricas.

Distinguimos los siguientes ángulos notables:

En radianes	En grados
$\frac{\pi}{6}$	30
$\frac{\pi}{4}$	45
$\frac{\pi}{3}$	60
$\frac{\pi}{2}$	90

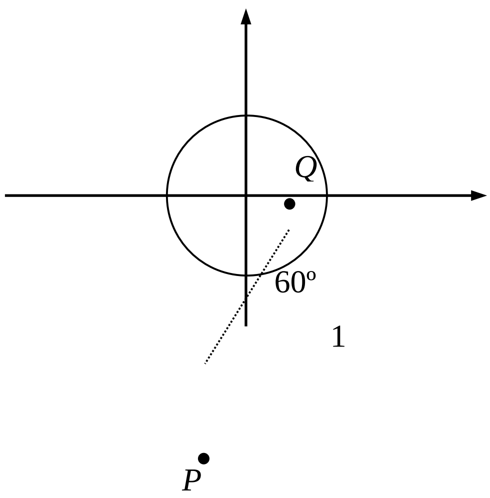
y además, todos los ángulos cuadrantales, cuya medida en radianes es múltiplo de π/2 y, en grados, es múltiplo de 90. Aplicando simetrías se pueden determinar las funciones trigonométricas de otros muchos ángulos del segundo, tercero y cuarto cuadrantes, de la misma forma que se hacía con los números notables.

Ejemplo

Determinar las funciones trigonométricas de 240º

Solución:

Como 240º es 180º + 60º, se trata de un ángulo del tercer cuadrante, como se muestra en la figura. El punto *P* determinado por este ángulo es simétrico del punto *Q* determinado por el ángulo de 60º. A partir de las coordenadas de *Q* se determinan las de *P* y con eso los valores de las seis funciones trigonométricas. Como 60º significan π/3 radianes:



Las coordenadas de *Q* son: $W\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ así que las de *P* serán: $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Luego: sen(240º) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ cos(240º) = $-\frac{1}{2}$ tan(240º) = $\sqrt{3}$

csc(240º) = $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ sec(240º) = – 2 cot(240º) = $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Identidades trigonométricas básicas

Dada la coincidencia de los valores de las funciones trigonométricas y las circulares, todas las identidades circulares son también identidades trigonométricas. La diferencia, bastante sutil, es que los argumentos ahora serian ángulos. Igual que antes, estas identidades, entre otras cosas permiten hallar los valores de las funciones trigonométricas a partir de una de ellas y de algún dato que permita determinar sin ambigüedades el cuadrante del ángulo.

Algunos ejemplos de funciones especiales

Función parte entera

Al descomponer un número real “x” en la forma: x = n + y con $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{y} \leq \mathbf{1}$, al número $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}$ se le denomina PARTE ENTERA DE “x” que se denota por: $[\boldsymbol{x}]$, y la otra parte y = x - $[\boldsymbol{x}]$ se le denomina MANTISA de “x” que suele denotarse por m(x) = x - $[\boldsymbol{x}]$, que significa SOBRANTE.

HAGA LOS GRÁFICOS DE AMBAS FUNCIONES.

Función signo:

sig (x) = $\begin{cases} \mathbf{1}\ \boldsymbol{si}\ \ \boldsymbol{x} > \mathbf{0} \\ \mathbf{0}\ \boldsymbol{si}\ \ \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \\ -\mathbf{1}\ \boldsymbol{si}\ \ \boldsymbol{x} < \mathbf{0} \end{cases}$ Sugerimos al lector hacer la gráfica de esta función.

Función de Dirichlet

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{1}\ \boldsymbol{si}\ \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q} \\ \mathbf{0}\ \boldsymbol{si}\ \ \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{Q} \end{cases}$ La gráfica es verdaderamente interesante. INTÉNTELA!!!

Transformaciones asociadas a una función:

Desplazamientos (traslaciones) verticales

y = f(x) + k $\begin{cases} \boldsymbol{k} > \mathbf{0}\ \textbf{desplaz.de la gráfica de f(x),k unidades hacia arrioba} \\ \mathbf{k} < \mathbf{0}\ \textbf{desplaz.de la gráfica de f(x),k unidades hacia abajo} \end{cases}$

Desplazamientos (traslaciones) horizontales:

y = f(x+h) $\begin{cases} \boldsymbol{h > 0 \text{ desplaz. de la gráfica de f(x), h unidades a la izquierda}} \\ \mathbf{h < 0 \text{ desplaz. de la gráfica de f(x), h unidades a la derecha}} \end{cases}$

Reflexión:

y = - f(x) refleja la gráfica de y = f(x) con respecto al eje "x".

Dilatación (expansión) o contracción vertical

Y=Af(x)

$\begin{cases} \boldsymbol{A > 1 \text{ dilata la gráfica de f(x) verticalmente multip. cada ordenada por A.}} \\ \mathbf{0 < A < 1 \text{ contrae la gráfica de f(x) verticalmente multip. cada ordenada por A}} \end{cases}$

Con el resumen anterior, es posible construir la gráfica de nuevas funciones a partir de funciones de gráficos conocidos y simples.

Ejercicios propuestos:

Representar gráficamente las funciones:

a) $f(x) = (x+3)^2 - 4$
b) $f(x) = x^3 - 2$
c) $f(x) = |x - 4|$

CAPÍTULO III.- DEFINICIÓN DE FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

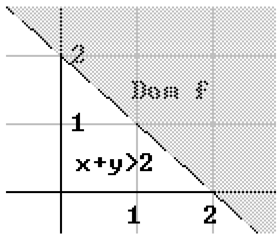
DEFINICIÓN*:* Sea $D \subseteq R^n$ con $n \geq 2$. Se llama *función* real *de n variables* a toda regla *f* que a cada punto $(x_1, \cdots, x_n) \in D$ le asigna un número real único.

Esto se expresa así:

$$f: \underset{(x_1,\cdots,x_n) \to f(x_1,\cdots,x_n)}{D \to R} \qquad \text{o} \qquad z = f(x_1, \cdots, x_n),$$

donde D es el *dominio* de la función, z es la *función* y $x_1, \cdots, x_n$ son las *variables independientes*. En particular, para funciones de dos y tres variables escribiremos $z = f(x, y)$ y $u = f(x, y, z)$ respectivamente.

Lo más elemental que se debe conocer de una función es su dominio y cómo se obtiene el valor de la misma para un elemento del dominio.



Ejemplos:

1.-Sea $z = \ln(x + y - 2)$. Entonces:

a) $Dom\ f = \{(x, y) \in R^2 : x + y - 2 > 0\}$, o sea, el conjunto de todos los puntos del plano tales que $x + y > 2$. Estos son los puntos que están por encima de la recta $x + y = 2$

b) El valor de la función en un punto $(x_0, y_0) \in$ Dom *f* se obtiene sustituyendo a *x* por x_0 y a *y* por y_0 como se muestra a continuación:

$f(1; 2) = \ln(1 + 2 - 2) = \ln 1 = 0.$

$f(2; e) = \ln(2 + e - 2) = \ln e = 1.$

$f(-1; 5) = \ln(-1 + 5 - 2) = \ln 2.$

2.-Sea $c = 3{,}5x + 2{,}75y + 5z$ el gasto de un consumidor que debe comprar *x*, *y* e *z* libras de arroz, azúcar y frijoles respectivamente. Entonces:

a) Dom $c = \{(x, y, z) \in R^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$, o sea, esta función no tiene sentido si sus argumentos son negativos.

b) $c(10;10;2) = 3{,}5 \cdot 10 + 2{,}75 \cdot 10 + 5 \cdot 2 = 72{,}50$. Esto significa que 10 *lb* de arroz, 10 *lb* de azúcar y 2 *lb* de frijoles cuestan, en total, \$72,50.

c) $c(2;4;0) = 3{,}5 \cdot 2 + 2{,}75 \cdot 4 + 5 \cdot 0 = 12$. Esto quiere decir que si el consumidor compra 2 *lb* de arroz, 4 *lb* de azúcar y no compra frijoles, entonces gasta $12.

3.-Con mucha frecuencia utilizaremos la *función* de producción *de Cobb-Douglas*:

$q = A\,k^{\alpha}\,l^{\beta}$.

Aquí, *q* es la cantidad de producto fabricada, *k* es el capital invertido, *l* es la fuerza de trabajo empleada, *A* es una constante positiva que indica el estado general de la tecnología utilizada, mientras que α y β son dos constante positivas tales que $\alpha + \beta = 1$.

Curvas de nivel

Una de las formas de expresar una función de varias variables, que tiene importantes aplicaciones en la práctica, es mediante sus conjuntos de nivel.

DEFINICIÓN. Se llama *conjunto de nivel* de la función $f(x,y)$ al conjunto de todos los puntos (x,y) del dominio de la función para los cuales $f(x,y)$ es constante.

De la definición se deduce que una función tiene tantos conjuntos de nivel como valores, pues cada valor de la función determina exactamente un conjunto de nivel. El conjunto de nivel determinado por el valor *k*, lo denotaremos por F_k, o sea:

$F_k = \{(x,y) \in Dom\, f \,:\, f(x,y) = k\}$

Ejemplo:

1.-Dada la función $f(x,y) = y - x^2$. Determine y represente gráficamente los conjuntos de nivel para los cuales $z = -1,\ z = 0,\ z = 2$.

Los conjuntos de nivel pedidos son:

$F_{-1} = \{(x,y) \in R^2 : y - x^2 = -1\} = \{(x,y) \in R^2 : y = x^2 - 1\}$.

$F_0 = \{(x,y) \in R^2 : y - x^2 = 0\} = \{(x,y) \in R^2 : y = x^2\}$.

$F_2 = \{(x,y) \in R^2 : y - x^2 = 2\} = \{(x,y) \in R^2 : y = x^2 + 2\}$.

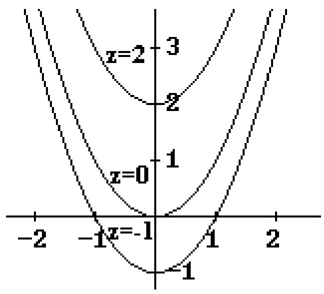


Figura 13

Función de varias variables

Gráficamente, F_{-1} es la parábola $y = x^2 - 1$, F_0 es la parábola normal $y = x^2$, mientras que F_2 es la parábola $y = x^2 + 2$

Como se puede ver en ejemplo anterior, cuando la función depende de dos variables, sus conjuntos de nivel representan, geométricamente, curvas en el plano. Estas curvas se denominan *curvas de nivel* de la función. Nótese además que estas curvas son paralelas entre sí.

Por otro lado, en todos los puntos de una curva de nivel, la función tiene el mismo valor. Es por eso que para algunas funciones específicas, las curvas de nivel se identifican con el prefijo "*iso*" que significa igual. Por eso es que:

– Las curvas de nivel de la función de costo se llaman curvas de *isocosto* y eso significa que en todos los puntos situados sobre una de ellas, el costo es el mismo.

– Las curvas de nivel de la función de producción se llaman curvas *isocuantas* y están formada por las combinaciones de factores de producción para las cuales se obtiene la misma cantidad de producto, o sea, que mantienen estable el nivel de producción.

– Las curvas de nivel de la función que describe la temperatura se llaman curvas *isotérmicas*, las curvas de nivel de la función que describe la presión atmosférica se llaman curvas *isobáricas*, etc.

Ejemplo:

1.-Se deben comprar *x* libras de tomate, a $2 la libra, e *y* libras de arroz, a $3 cada una.

a) Determine la función de gasto total de un consumidor.

b) Determine e interprete económicamente los conjuntos de nivel para los cuales el gasto es de $3, $6 y $9.

c) Trace las curvas de isocosto correspondiente a los conjuntos del inciso b).

Respuesta:

x: libras de tomate

y: libras de arroz

$x \geq 0; \quad y \geq 0$

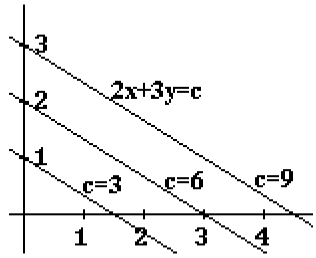
a) El gasto total de un consumidor viene dado por la función $c(x, y) = 2x + 3y$.

b) Los conjuntos de nivel para los cuales el costo es de \$3, \$6 y \$9 son:

$C_3 = \{(x, y) : 2x + 3y = 3\}$

$C_6 = \{(x, y) : 2x + 3y = 6\}$

$C_9 = \{(x, y) : 2x + 3y = 9\}$.



El primero representa el conjunto de todas las combinaciones de producto que puede adquirir un consumidor manteniendo el nivel de gasto en \$3. Análogamente se interpretan los otros.

c) Las curvas de isocosto son los segmentos de las rectas $2x + 3y = 3$, $2x + 3y = 6$ y $2x + 3y = 9$ situados en el primer cuadrante.

Límite y Continuidad

Sin perder la generalidad, vamos a tratar los conceptos que siguen para funciones de dos variables.

DEFINICIÓN. Una función $f(x, y)$ tiene *límite L* cuando $x \to x_0$ e $y \to y_0$ si para todo $\varepsilon > 0,$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, entonces $| f(x, y) - L | < \varepsilon$.

En este caso se escribe: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = L.$ (I)

Observación:

1.-La notación (I) indica por cualquier vía que $(x, y) \to (x_0, y_0)$, la función tiende a L. Indica además que $x \to x_0$ al mismo tiempo que $y \to y_0$, o sea, ambas variables se mueven simultáneamente. Por esta razón el límite (I) se llama *límite doble* y es la generalización del concepto de límite ordinario que vimos para funciones de una variable.

2.-El límite doble no se puede confundir, de ninguna manera, con los *límites iterados*:

$$\lim_{x \to x_0} \left[\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right] \qquad \text{(II)}$$

$$\lim_{y \to y_0} \left[\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right] \qquad \text{(III)}$$

pues éstos indican hacia donde tiende la función $f(x,y)$ cuando $(x,y)\to(x_0,y_0)$ siguiendo la dirección de los ejes de coordenadas. Los límites iterados constituyen la generalización de los límites laterales que estudiamos para funciones de una variable.

De acuerdo con las observaciones anteriores, es evidente que s*i existe el límite doble* (I), *existen también y son iguales los límites iterados* (II) y (III). Lo contrario no siempre se cumple, o sea, *si los límites iterados son iguales, no se puede afirmar que existe el límite doble*. Por tanto, existencia e igualdad de los límites iterados es una condición necesaria, pero no suficiente, para la existencia del límite doble.

***Ejemplo*:**

1.-Sea $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ con $(x,y)\neq(0;0)$. Analizar si existe el límite de cuando $(x,y)\to(0;0)$.

a) $$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{0}{x^4}\right)=\lim_{x\to0}0=0$$

b) $$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)=\lim_{y\to0}\left(\frac{0}{y^2}\right)=\lim_{y\to0}0=0$$

Los límites iterados son iguales, pero esto no indica que el límite doble existe. Veamos qué ocurre si (x,y) se acerca a $(0;0)$ por la curva $y=x^2$.

c) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0;0)\\ y=x^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2x^2}{x^4+(x^2)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{2x^4}=\lim_{x\to0}\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}$$

Como hemos encontrado una forma de llegar al origen para la cual el límite difiere de los límites iterados, podemos afirmar el límite doble no existe, o sea, la función dada no tiene límite cuando *x* e *y* tienden a cero simultáneamente.

De la misma forma que las funciones de una variable, las funciones de dos variables son continuas en los puntos para los cuales el valor de la función y el límite doble coinciden.

DEFINICIÓN. La función $f(x, y)$ *es continua* en (x_0, y_0) si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

De acuerdo con la continuidad de las funciones básicas estudiadas para el caso en que estas dependen de una sola variable, las funciones de dos variables dada por una expresión formada por funciones elementales básicas son continuas en todos los puntos donde la expresión esté definida. Esto nos permite calcular algunos límites de funciones de dos variables siguiendo procedimientos similares a los que se utilizaron para el cálculo de límites de funciones de una variable.

***Ejemplo*:**

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1;\,1)} \dfrac{x^3 - y^3}{x - y} = \lim\limits_{(x,y)\to(1;1)} \dfrac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{x - y} = \lim\limits_{(x,y)\to(1;1)} (x^2 + xy + y^2) = 3.$

Estas nociones de límite y continuidad para una función de dos variables, pueden extenderse a funciones de más de dos variables.

Derivadas parciales

DEFINICIÓN. Sea $z = f(x, y)$ una función definida en un conjunto abierto $D \subseteq R^2$.

Se llama *derivada parcial* de *f* con respecto a *x* al $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, si este existe.

La derivada parcial de *f* con respecto a *x* se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ o por f_x, o sea,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Análogamente se denota y se define la derivada parcial de *f* con respecto a *y*:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_x = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta x) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Al calcular el límite que define la derivada parcial de *f* con respecto a *x*, la *y* permanece fija. De la misma forma, al calcular el límite que define la derivada parcial de *f* con respecto *y*, la *x* permanece fija. Esto nos indica que en el proceso de cálculo de las derivadas parciales, la función se considera dependiente, únicamente de la variable de derivación, mientras que el resto de las variables permanecen fijas; por tanto, aquí se aplican las mismas reglas de derivación que se utilizan para la derivación funciones de una sola variable, teniendo en cuenta que a las variables que permanecen fijas se les aplican las reglas de derivación de la función constante.

***Ejemplos*:**

1.-Sea $z = x^3 + 8xy + 5y^2$. Entonces:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 8y + 0 = 3x^2 + 8y$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 + 8x + 10y = 8x + 10y$

2.-La función $f(x,y,z) = \sqrt{2x+3y+4z}$ tiene tres derivadas parciales:

a) $f_x = \dfrac{\frac{\partial}{\partial x}(2x+3y+4z)}{2\sqrt{2x+3y+4z}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+3y+4z}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3y+4z}}$

b) $f_y = \dfrac{\frac{\partial}{\partial y}(2x+3y+4z)}{2\sqrt{2x+3y+4z}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2x+3y+4z}}$

c) $f_z = \dfrac{\frac{\partial}{\partial z}(2x+3y+4z)}{2\sqrt{2x+3y+4z}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2x+3y+4z}} = \dfrac{2}{\sqrt{2x+3y+4z}}$

En muchos de los problemas que vamos a resolver más adelante, es necesario hallar el valor específico de una o más derivadas parciales en un punto de su dominio. Eso se hace evaluando la derivada, de la misma forma que lo hacemos para una función cualquiera. Sin embargo, hay que tener mucho cuidado en la forma de indicarlo, pues esta varía en dependencia de la notación que se use para la derivada y de la situación real que se esté resolviendo.

Ejemplo:

2.-Sea $f(x,y) = xy^2 + 2x^2y$. Evaluar la derivada parcial de *f* con respecto *x* en un punto.

a) Si la derivada se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 2x$, entonces su valor en el punto (1; 2) se indica y se calcula así: $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1;2)} = 2^2 + 2 \cdot 1 = 6$.

b) Si la derivada se denota por $f_x = y^2 + 2x$, entonces su valor en (–3; 4) se indica y se calcula de esta forma: $f_x(-3;4) = 4^2 + 2(-3) = 10$

En el ejemplo anterior, la función viene dada en la forma $f(x,y)$ y eso indica que a la *x* se le asigna el valor de la primera coordenada del punto, mientras que a la *y* se le asigna el valor de la segunda coordenada. Ahora bien, si la misma función se expresa en la forma $z = xy^2 + 2x^2y$, el orden entre *x* e *y* no queda claro. En situaciones como esta, a veces se asume por defecto, el orden alfabético. Sin embargo, ese puede no ser el orden de las variables y entonces se comete un error al evaluar la función. Por tanto, en estos casos, lo rigurosamente correcto es indicar el valor de cada variable.

Ejemplo:

3.-Sea $w = \alpha^2 x^2$. Evaluar la derivada de *w* con respecto a α para $x = 2$ y $\alpha = 5$.

$\dfrac{\partial w}{\partial \alpha} = 2\alpha x^2$. Por tanto, $\left.\dfrac{\partial w}{\partial \alpha}\right|_{\substack{\alpha=5\\ x=2}} = 2 \cdot 5 \cdot 2^2 = 40$.

A partir de las derivadas parciales se puede obtener un vector llamado *Gradiente* de la función cuyas componentes son las derivadas parciales de la función. Se denota por ∇f : "*se lee nabla f*". Este vector es variable porque depende de las mismas variables que la función que lo genera, por eso para obtener el gradiente en un punto específico hay que evaluarlo para el punto en cuestión.

Ejemplo:

3.-Sea $f(x,y,z) = \ln(x^3 + y^2 + z)$. Entonces:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{3x^2}{x^3 + y^2 + z}, \frac{2y}{x^3 + y^2 + z}, \frac{1}{x^3 + y^2 + z}\right).$$

$$\nabla f(-1;2;0) = \left(\frac{3}{-1+4+0}, \frac{4}{-1+4+0}, \frac{1}{-1+4+0}\right) = \left(1; \tfrac{4}{3}; \tfrac{1}{3}\right).$$

Derivadas parciales de orden superior

Si las derivadas parciales de la función $z = f(x,y)$ son funciones derivables, entonces sus respectivas derivadas parciales se llaman derivadas parciales de segundo orden de *f*. Las segundas derivadas parciales se calculan y se denotan como sigue:

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$

En la otra notación quedan como sigue:

a) $(f_x)_x = f_{xx}$ b) $(f_x)_y = f_{xy}$ c) $(f_y)_x = f_{yx}$ d) $(f_y)_y = f_{yy}$

Nótese que una función de dos variables tiene $2^1 = 2$ derivadas parciales de primer orden, $2^2 = 4$ derivadas de segundo orden y así sucesivamente. En general, *una función de n variable tiene* n^k *derivadas parciales de orden k*

***Ejemplos*:**

1.-Sea $f(x,y,z) = x^2y^3z^4$. Entonces tiene 9 derivadas parciales de segundo orden. En efecto:

$f_x = 2xy^3z^4$ $f_{xx} = 2y^3z^4$ $f_{xy} = 6xy^2z^4$ $f_{xz} = 4xy^3z^3$

$f_y = 3x^2y^2z^4$ $f_{yx} = 6xy^2z^4$ $f_{yy} = 6x^2yz^4$ $f_{yz} = 12x^2y^2z^3$

$f_z = 4x^2y^3z^3$ $f_{zx} = 8xy^3z^3$ $f_{zy} = 12x^2y^2z^3$ $f_{zz} = 12x^2y^3z^2$

Las derivadas de segundo orden se pueden disponer en una matriz cuadrada cuyo orden coincide con el número de variable de la función. Esta matriz se llama *matriz hessiana* de la función dada y se denota con la letra *H*.

***Ejemplo*:**

2.-De acuerdo con el ejemplo anterior, la matriz hessiana de $f(x,y,z) = x^2y^3z^4$ es

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^3z^4 & 6xy^2z^4 & 4xy^3z^3 \\ 6xy^2z^4 & 6x^2yz^4 & 12x^2y^2z^3 \\ 8xy^3z^3 & 12x^2y^2z^3 & 12x^2y^3z^2 \end{bmatrix}.$$

Las derivadas de segundo orden que se obtienen derivando con respecto a las mismas variables pero en orden contrario se llaman derivadas parciales *cruzadas* o *mixtas*. Para estas derivadas se cumple una propiedad muy importante conocida como teorema de *Schwartz*.

TEOREMA. *Si la función* $f(x,y)$ *y sus derivadas parciales* $f_x,\ f_y,\ f_{xy},\ f_{yx}$ *son continuas, entonces se cumple que* $f_{xy} = f_{yx}$.

De acuerdo con el teorema de Schwartz, si se cumplen las condiciones del mismo, entonces la matriz hessiana es simétrica. Esto se debe que las derivadas parciales cruzadas, que son iguales, son simétricas con respecto a la diagonal principal de la matriz hessiana, como se sucede en el ejemplo anterior.

De manera análoga a las derivadas de segundo orden, se calculan las derivadas parciales de orden superior a 2.

***Ejemplo*:**

3.-Dada la función $u = x^5y^4e^t$. Hallar:

a) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}(x^5y^4e^t)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}(4x^5y^3e^t)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(20x^4y^3e^t) = 80x^3y^3e^t$

b) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}(x^5y^4e^t)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}(5x^4y^4e^t)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}(20x^4y^3e^t) = 80x^3y^3e^t$

Nótese que aquí se derivó dos veces con respecto a *x* y una vez con respecto a *y* en órdenes distintos, sin embargo las derivadas obtenidas por las dos vías son iguales. Esto se debe a que cumplen las condiciones del teorema de Schwartz.

c) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial t} = \dfrac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}(x^5y^4e^t)\right) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}(x^5y^4e^t)\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}(4x^5y^3e^t)\right)$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(20x^4y^3e^t)$$

$$= 80x^3y^3e^t$$

Interpretación económica de las derivadas parciales

Las derivadas parciales tienen una interpretación análoga a la derivada ordinaria vista para funciones de una variable. Por ejemplo, si $u = f(x, y, z)$ es la función de utilidad total por la producción y venta de tres productos en cantidades *x*, *y*, *z*, entonces las derivadas parciales u_x, u_y, u_z representan las utilidades marginales con respecto a *x*, *y*, *z* respectivamente. Análogamente ocurre con la función de costo, de ingreso, de producción, etc.

En general, el valor de una derivada parcial en un punto representa la tasa de variación de la función total con respecto a la variable de derivación, siempre que las demás variables permanezcan fijas.

***Ejemplos*:**

1.-Una fábrica produce *x* pares de botas e *y* pares de tenis semanalmente. El costo total de la producción es $c = 0{,}06x^2 + 7x + 15y + 1000$.

a) Determine las funciones de costo marginal.

b) Halle los costos marginales si se fabrican 100 pares de botas y 50 pares de tenis por semana.

c) Interprete los resultados económicamente.

Planteamiento:

x: pares de botas fabricados semanalmente

y: pares de tenis fabricados semanalmente

$c(x, y) = 0{,}06x^2 + 7x + 15y + 1000$ pesos

$x_0 = 100$ pares de botas

$y_0 = 50$ pares de tenis

Resolución:

a) $\frac{\partial c}{\partial x} = 0{,}12x + 7$ (Costo marginal con respecto a la producción de botas).

$\frac{\partial c}{\partial y} = 15$ (Costo marginal con respecto a la producción de tenis).

b) $\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{(100;\,50)} = 0{,}12 \cdot 100 + 7 = 19$ pesos por par de botas.

$$\left.\frac{\partial c}{\partial y}\right|_{(100;\,50)} = 15 \text{ pesos por par de tenis.}$$

Conclusión:

Esto significa que si se mantiene la producción de 50 pares de tenis semanales, entonces el costo total aumentará aproximadamente en $19 por cada par de botas que se fabrique por encima de los 100 pares semanalmente. Sin embargo, el costo total aumenta en $15 por cada par de tenis que se fabrique, independientemente del nivel de producción que alcance la fábrica, porque es constante.

2.-La cantidad de cajas de un tipo de juguete que se puede fabricar semanalmente es $q = \sqrt{kl}$ donde k es el capital empleado (en cientos de pesos) y l es el número de horas de mano de obra.

a) Determine las funciones de productividad marginal.

b) Halle los rendimientos marginales para si se trabajan 400 horas por semana y se emplean 16 cientos de pesos.

c) Interprete los resultados del inciso b).

Planteamiento:

k: cientos de pesos empleados en la producción semanalmente.

l: horas de mano de obra empleada semanalmente.

$q(k,l) = \sqrt{kl}$ cajas de juguete fabricadas semanalmente.

$k = 16$ cientos de pesos.

$l = 400$ horas de mano de obra.

Resolución:

a) $\dfrac{\partial q}{\partial k} = \dfrac{l}{2\sqrt{kl}}$. Productividad marginal con respecto al capital.

$\dfrac{\partial q}{\partial l} = \dfrac{k}{2\sqrt{kl}}$. Productividad marginal con respecto a la mano de obra.

b) $$\left.\frac{\partial q}{\partial k}\right|_{(16;\,400)} = \frac{400}{2\sqrt{16\cdot 400}} = \frac{5}{2} = 1{,}5$$

$$\left.\frac{\partial q}{\partial l}\right|_{(16;\,400)} = \frac{16}{2\sqrt{16\cdot 400}} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Conclusiones:

De acuerdo con los resultados obtenidos en el inciso b), si se emplean 400 horas de mano de obra semanal, entonces la producción aumenta aproximadamente en 1,5 cajas semanalmente por cada $100 que aumente el capital por encima de $1600. Sin embargo, si se fija el capital en $1600, entonces la producción aumenta aproximadamente en 0,1 caja de juguete por cada hora de mano de obra que se aumente por encima de las 400 horas semanales.

Elasticidades parciales

Recordemos que la elasticidad de una función de una variable: $y = f(x)$, es $\eta = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$.

Análogamente se definen las elasticidades parciales de una función de varias variables.

DEFINICIÓN: Sea $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Se denomina *elasticidad parcial* de z con respecto a x_i $(i = 1; 2; \cdots, n)$ a la expresión $\frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{z}$. Se denota por $E_{x_i} z$, o sea, $E_{x_i} z = \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{x_i}{z}$

.

Ejemplo:

1.-Determine las elasticidades parciales de la función $z = xe^y$.

a) $E_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{x}{z} = e^y \cdot \frac{x}{xe^y} = 1$ b) $E_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{y}{z} = xe^y \cdot \frac{y}{xe^y} = y$

El número que se obtiene al evaluar la elasticidad parcial de z con respecto a una variable en un punto representa una aproximación del porciento de variación de z cuando dicha variable aumenta en un 1%, a partir del punto indicado, manteniendo las demás variables fijas.

***Ejemplo*:**

2.-La función de demanda del producto A es $q_1 = 1000 - 20p_1 + 10p_2$ donde p_1 es el precio unitario del producto A y p_2 es el precio unitario otro producto B. Determine e interprete las elasticidades parciales de la demanda de A cuando $p_1 = 30$ y $p_2 = 30$.

Planteamiento:

p_1: pesos por unidad de producto A p_2: pesos por unidad de producto B

$p_1 = 30$ y $p_2 = 30$. $q_1 = 1000 - 20p_1 + 10p_2$ unidades de producto A.

Resolución:

$$E_1\,q_1 = \frac{\partial q_1}{\partial p_1}\cdot\frac{p_1}{q_1} = -20\cdot\frac{p_1}{1000-20p_1+10p_2} = -\frac{20p_1}{10(100-2p_1+p_2)} = -\frac{2p_1}{100-2p_1+p_2}$$

$$E_2\,q_1 = \frac{\partial q_1}{\partial p_2}\cdot\frac{p_2}{q_1} = 10\cdot\frac{p_2}{1000-20p_1+10p_2} = \frac{10p_2}{10(100-2p_1+p_2)} = \frac{p_2}{100-2p_1+p_2}$$

Para $p_1 = 30$ y $p_2 = 20$ se obtiene:

$$E_1\,q_1 = -\frac{2\cdot 30}{100-2\cdot 30+30} = -\frac{60}{10} = -6 \qquad\qquad E_2\,q_1 = \frac{30}{100-2\cdot 30+30} = \frac{30}{10} = 3$$

Conclusiones:

De acuerdo con los resultados anteriores, si el precio del producto 2 se mantiene en \$20, entonces un aumento del 1% en el precio del producto 1, a partir de \$30, provoca una disminución del 6% en la demanda del producto 1. Sin embargo, si se fija el precio del producto 1 en \$30, entonces un aumento del 1% en el precio del producto 2, por encima de los \$20, hace que la demanda del producto 1 aumente en un 3%.

3.-La cantidad de cajas de un tipo de juguete que se puede fabricar semanalmente es $q = \sqrt{kl}$ donde *k* es el capital empleado (en cientos de pesos) y *l* es el número de horas de mano de obra. Determine e interprete las elasticidades parciales de la función de producción.

Planteamiento:

k: cientos de pesos empleados en la producción semanalmente.

l: horas de mano de obra empleada.

$q = \sqrt{kl}$ cajas de juguetes fabricados semanalmente.

Resolución:

a) $E_k\ q = \frac{\partial q}{\partial k}\frac{k}{q} = \frac{l}{2\sqrt{kl}}\frac{k}{\sqrt{kl}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ b) $E_l\ q = \frac{\partial q}{\partial l}\frac{l}{q} = \frac{k}{2\sqrt{kl}}\frac{l}{\sqrt{kl}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Conclusiones:

De acuerdo con los resultados anteriores, si se mantiene fijo uno de los dos factores de producción, el aumento del otro en un 1% provoca que la producción aumente aproximadamente en un 0,5%.

Diferencial total

DEFINICIÓN. Sea $z = f(x, y)$ una función con derivadas parciales continuas. Se denomina *diferencial total* de z a la expresión $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Este concepto se puede generalizar a funciones de más de dos variables. Para eso solo hay que tener en cuenta que *dz* es la suma los productos de cada una de las derivadas parciales por el diferencial de la variable correspondiente.

Ejemplos:

1.-Sea $z = e^{xy}$. Entonces $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y e^{xy} dx + x e^{xy} dy$.

2.-Sea $u = x^2 + y^3 + z^4$. Entonces $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 2x\, dx + 3y^2\, dy + 4z^3\, dz$

Nótese que, en general, el diferencial es una función que depende de las mismas variables que la función original y de sus correspondientes variaciones. Por tanto, para obtener un valor numérico del diferencial total, hay que conocer el valor inicial de cada una de las variables independientes y de sus correspondientes diferenciales. El valor obtenido del diferencial total representa una aproximación de la variación que experimenta la función, o sea, $\Delta z \approx dz$. Esta aproximación será más exacta cuantos más pequeños sean los diferenciales

Ejemplo:

3.-La cantidad de producto *q* que se puede elaborar utilizando *x* unidades de materia prima A e *y* unidades de materia prima B viene dada por *q=xy.* Inicialmente se estaban utilizando 15 unidades de A y 20 unidades de B. ¿Cuál es la variación aproximada de la producción si aumentamos una unidad de materia prima A y la disminuimos de materia prima B?

Planteamiento

x: unidades de materia prima A.

y: unidades de materia prima B.

q: unidades de producto.

$q=xy$ (función de producción).

$x_0 = 15; \ \ \Delta x = 1.$

$y_0 = 20; \ \ \Delta y = -1.$

$\Delta q \approx ?.$

Resolución

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy = y\,dx + x\,dy$$

Sustituyendo tenemos que $dq = 20 \cdot 1 + 15(-1) = 5$

Conclusión

Si la materia prima *A* aumenta de 15 a 16 unidades y la *B* disminuye 20 a 19 unidades, la producción aumenta aproximadamente en 5 unidades de producto

El valor exacto de la variación de la función se calcula como sigue:

$$\Delta q = q(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - q(x_0,\ y_0) = q(15+1,\ 20-1) - q(15,\ 20)$$

$$= q(16, 19) - q(15,\ 20) \ = 16 \cdot 19 - 15 \cdot 20 \ = 304 - 300 \ = 4.$$

La diferencia $dq - \Delta q = 5 - 4 = 1$ nos da el error absoluto que se comete al aproximar a Δq mediante *dq*. En este caso, como $1 > 0$, concluimos que se ha cometido un error de unidad de producto por exceso.

Ejercicio: Resuelva el mismo el mismo problema anterior tomando $\Delta x = 0{,}2$ y $\Delta y = 0{,}3$. Haga un análisis del error que se comete y compruebe que la aproximación es mejor. ¿A qué usted atribuye esa mejoría?

Derivadas parciales de funciones compuestas

El problema que nos ocupa en este epígrafe es el cálculo de las derivadas de una función de varias variables expresada en forma compuesta.

Una función de varias variables está en forma compuesta si sus argumentos no son variables libres, sino que sus valores dependen de terceras variables.

Ejemplo:

1.-Sea $z = x + y$ donde $x = s^2 + t^2$ e $y = 2st$.

En este caso z es la *función*, s y t son las *variables independientes* y x e y son *variables intermediarias* o *variables intermedias*. Para mejor comprensión, la dependencia entre las variables se representa a través de un esquema, denominado *árbol de dependencia funcional*, como el siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & s \\ & & & / & \\ & / & x & — & t \\ z & & & & s \\ & \backslash & & / & \\ & & y & — & t \end{array}$$

Para hallar el valor de una función expresada en esta forma, se le dan valores a las variables independientes. De esta forma se obtienen los valores de las variables intermedias. Luego, asignado a las variables intermedias los valores obtenidos, se obtiene el valor de la función.

Ejemplo:

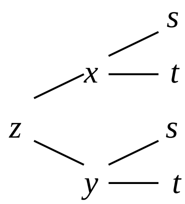
2.-Sea $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ con $x = s^2 + 2st$ e $y = 2st + t^2$. Hallar f para $s = -2$ y $t = 1$.

Para $s = -2$ y $t = 1$, se obtiene que $x = (-2)^2 + 2(-2)1 = 0$ e $y = 2(-2)1 + 1^2 = -3$.

Entonces $f(0,-3) = \ln[0^2 + (-3)^2] = \ln 9$

Para calcular las derivadas, primero se confecciona el árbol de dependencia funcional. Luego, cada derivada se obtiene sumando todos los productos que resultan de derivar en cadena desde el tronco del árbol de dependencia funcional hasta las ramas que terminan en la variable de derivación. Por tanto:

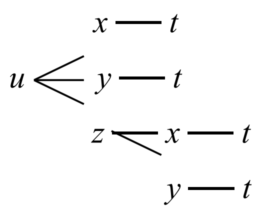
3.-Calcular las derivadas de $z = e^{x+y}$ donde $x = s^2 + 2st$ e $y = 2st + t^2$.



a) $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} = e^{x+y}(2s+2t) + e^{x+y}(2t) = 2(s+t)e^{x+y} + 2t\,e^{x+y}$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} = e^{x+y}(2s) + e^{x+y}(2s+2t) = 2s\,e^{x+y} + 2(s+t)e^{x+y}$

4.-Calcular la derivada de $u = xyz$ donde $z = 5x + 3y$, $x = 8t$, $y = t^2$



$$= yz \cdot 8 + xy \cdot 2t + xy \cdot 5 \cdot 8 + xy \cdot 3 \cdot 2t$$

$$= 8yz + 2txy + 40xy + 6txy$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

En este ejemplo, solo hay una variable libre; por tanto, la derivada de u con respecto a t es ordinaria y no parcial. Lo mismo ocurre con las derivadas de x e y con respecto a t. Por eso se usó la notación de derivada ordinaria en la fórmula anterior.

Aplicaciones en la administración y el área económica

Existen muchos problemas económicos en los que es necesario hallar la derivada de una función compuesta para analizar la tasa de variación de una magnitud con respecto a otra.

Ejemplo:

5.-El costo total de fabricación de dos tipos de producto es $c = 30q_1 + 0{,}015q_1q_2 + q_2 + 900$, donde q_1 y q_2 son las cantidades respectivas de cada uno. Las funciones de demandas son $q_1 = 9000 - p_1p_2$ y $q_2 = 2000 - p_1 - 400p_2$, donde p_1 y p_2 son los precios unitarios de cada producto. Haga un análisis de la tasa de variación del costo total con respecto al precio de cada producto cuando los mismos sean \$50 y \$2 respectivamente.

Planteamiento**:**

q_1 : unidades de producto 1

q_2 : unidades de producto 2

p_1 : pesos por unidad de producto 1

p_2 : pesos por unidad de producto 2

$q_1 = 200 - p_1 p_2$

$q_2 = 1850 - p_1 - 400 p_2$,

$p_1 = 50$

$p_2 = 2$

$c = 30q_1 + 0{,}015 q_1 q_2 + q_2 + 900$ costo total de producción (en $)

Resolución:

$$
\begin{array}{lll}
 & & p_1 \\
 & q_1 & p_2 \\
c & & p_1 \\
 & q_2 & p_2
\end{array}
$$

a) $\dfrac{\partial c}{\partial p_1} = \dfrac{\partial c}{\partial q_1}\dfrac{\partial q_1}{\partial p_1} + \dfrac{\partial c}{\partial q_2}\dfrac{\partial q_2}{\partial p_1} = (30 + 0{,}015q_2)(-p_2) + (0{,}015q_1 + 1)(-1)$

$= -(30p_2 + 0{,}015p_2q_2 + 0{,}015q_1 + 1)$

b) $\dfrac{\partial c}{\partial p_2} = \dfrac{\partial c}{\partial q_1}\dfrac{\partial q_1}{\partial p_2} + \dfrac{\partial c}{\partial q_2}\dfrac{\partial q_2}{\partial p_2} = (30 + 0{,}015q_2)(-p_1) + (0{,}015q_1 + 1)(-400)$

$= -(30p_1 + 0{,}015p_1q_2 + 6q_1 + 400)$

Para $p_1 = 50$ y $p_2 = 2$, $q_1 = 200 - 50 \cdot 2 = 100$ y $q_2 = 1850 - 50 - 400 \cdot 2 = 1000$. Sustituyendo esos valores en las derivadas parciales se obtiene:

c) $\dfrac{\partial c}{\partial p_1} = -(30 \cdot 2 + 0{,}015 \cdot 2 \cdot 100 + 0{,}015 \cdot 1000 + 1) = -(60 + 3 + 15 + 1) = -79$

d) $\dfrac{\partial c}{\partial p_2} = -(30 \cdot 50 + 0{,}015 \cdot 50 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 400)$

$= -(1500 + 750 + 600 + 400) = -3250$

Conclusión:

Si se mantiene el precio del producto 2 en \$2, entonces el costo disminuye aproximadamente en \$79 por cada peso que aumente el precio del producto 1 por encima de los \$50. Sin embargo, si se mantiene el precio del producto 1 en \$50, entonces el costo disminuye aproximadamente en \$3250 por cada peso que aumente el precio del producto 2 por encima de los \$2.

Derivada de funciones implícitas expresadas por una ecuación

Se dice que una función está expresada en forma implícita si la ecuación que la representa no está resuelta con respecto a la variable dependiente (la función no está despejada), o sea, la ecuación tiene la forma $F(x, y, z) = c$ donde c es una constante.

Ejemplo:

1.-La ecuación $y^3 - \ln x = 0$ representa a *y* como función de *x* ya que $y = \sqrt[3]{\ln x}$ es una función. También representa a *x* como función de *y* porque $x = e^{y^2}$ es una función.

No obstante, hay que tener cuidado porque todas ecuaciones no representan funciones.

Ejemplo:

2.-La ecuación $e^x + y^2 + z^4 + 1 = 0$ no se satisface para ningún punto $(x, y, z) \in R^3$. Basta darse cuenta que el miembro izquierdo es siempre positivo. Por tanto, esta ecuación no representa a ninguna de las dos variables como función de la otra.

De acuerdo con los resultados de los ejemplos anteriores, podemos decir que para que una ecuación de la forma $F(x, y, z) = c$ represente una de las variables como función implícita de las demás, debe tener, por lo menos, una solución.

Supongamos que la ecuación $F(x, y, z) = c$ (*c* constante) representa a *z* como función de *x* e *y*, y que *z* es derivable con respecto a *x* e *y*. El problema ahora consiste en calcular las derivadas parciales de *z* con respecto a *x* y a *y*. Para eso *F* tiene que ser diferenciable. En ese caso:

$$dF(x, y, z) = d(c)$$

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = 0$$

$$F_z\,dz = -F_x\,dx - F_y\,dy.$$

Si, además, $F_z \neq 0$, entonces

$$dz = -\frac{F_x}{F_z}dx - \frac{F_y}{F_z}dy.$$

Pero $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$; por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Hay que tener en cuenta que, en las fórmulas anteriores, *F* no es la función, sino el miembro izquierdo de la ecuación, cuando el miembro derecho es una constante. En su lugar se puede usar *G*, *H* o cualquier otra letra, evitando siempre que no sea ninguna de las variables que aparecen en la ecuación para evitar confusiones. La función es *z* y las variables independientes son *x* e *y*.

En resumen, para calcular las derivadas de funciones expresadas en forma implícita por una ecuación, primero, se transponen hacia el miembro izquierdo de la ecuación todos los términos que contengan las variables, de este modo el miembro derecho es constante; luego se aplica la regla siguiente: *la derivada la función, con respecto a cualquiera de las variables libres, es igual al valor opuesto del cociente de la derivada del miembro izquierdo con respecto a la variable de derivación, entre la derivada del miembro izquierdo con respecto a la función*.

Ejemplo:

3.-Sea $x^2 + y^2 = 9$. Halle la derivada de *y*.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)}{\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

4.-Sea $2xy + 3yz = 4xz$. Halle las derivadas parciales de *z*.

Haciendo $2xy + 3yz - 4xz = 0$ tendremos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(2xy + 3yz - 4xz)}{\frac{\partial}{\partial z}(2xy + 3yz - 4xz)} = -\frac{2y - 4z}{3y - 4x}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}(2xy + 3yz - 4xz)}{\frac{\partial}{\partial z}(2xy + 3yz - 4xz)} = -\frac{2x + 3z}{3y - 4x}$$

Interpretación geométrica

La ecuación $F(x, y) = c$ (*c* constante) representa una curva en el plano *xy*. Si tomamos un punto (x_0, y_0) de dicha curva, entonces la pendiente de la tangente a la curva en ese punto es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0, y_0)} = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)};$$

por tanto, la ecuación de la tangente es

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}\ (x - x_0)$$

o también

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0\,.$$

Esta última fórmula permite hallar la ecuación de la tangente aún en aquellos puntos (x_0, y_0) de la curva para los cuales $F_y(x_0, y_0) = 0$. En estos puntos, la tangente es vertical.

Ejemplo:

4.-Halle la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ en el punto (1; 2).

Haciendo $F = x^2 + y^2 = 5$, se obtiene $F_x = 2x$ y $F_y = 2y$. De aquí resulta que $F_x(1;2) = 2$ y $F_y(1;2) = 4$. Por tanto, la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ en el punto (1; 2) es $2(x-1) + 4(y-2) = 0$ ó $x + 2y = 5$.

Esta es la recta que corta el eje *x* en (5; 0) y al eje *y* en (0; 2,5) (Fig. 4.10.1)

5.-Halle la ecuación de la tangente a la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ en el punto (2; 0).

Haciendo $G = x^2 + 4y^2 = 4$, se obtiene que $G_x = 2x$ y $G_y = 4y$.

Entonces $G_x(2;0) = 4$ y $G_y(2;0) = 0$.

Por tanto, la ecuación de la tangente es $4(x-2) + 0(y-2) = 0$ ó $x = 2$.

Esta tangente es la recta es vertical que corta al eje *x* en 2 (Fig. 4.10.2)

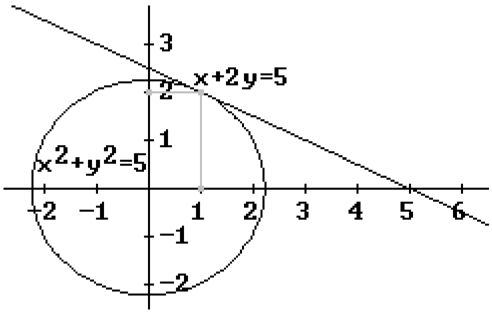


Figura 14

Ecuación de la Tangente 1

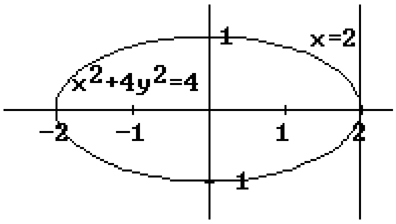


Figura 15

Ecuación de la Tangente 2

Interpretación económica

La ecuación $F(x,y) = c$ (*c* constante), que expresa a *y* como función implícita de *x*, es una curva de nivel de la función $F(x,y)$. Sea (x_0, y_0) un punto de dicha curva. Entonces

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

indica la forma en que deben hacerse variar a *x* e *y*, a partir del punto (x_0, y_0) para que la función se mantenga constante, estable o invariante:

- Si, para que $F(x,y)$ se mantenga invariante, a partir del (x_0, y_0), *x* e *y* deben variar en el mismo sentido, entonces se dice que *x* e *y* están en *relación de complemento* en ese punto. Esto ocurre cuando la derivada es positiva, o sea, en los tramos donde la curva es creciente.

- Si, para que $F(x,y)$ se mantenga estable, a partir del (x_0,y_0), x e y deben variar en sentido contrario, entonces se dice que x e y están en *relación de sustitución* en ese punto. Esto ocurre cuando la derivada es negativa, es decir, en los tramos donde la curva es decreciente.
- Si, para que $F(x,y)$ se mantenga constante, a partir del (x_0,y_0), cuando una de las variables cambia, la otra debe permanecer fija, entonces se dice que dichas variables son *independientes entre si* en ese punto. Esto ocurre cuando la derivada es cero, o sea, en los puntos estacionarios de la curva.

***Ejemplos*:**

6.-Sea $c = 8q_1 + 10q_2$ el costo total de fabricación de dos productos, donde q_1 y q_2 son sus respectivos niveles de producción. Actualmente $q_1 = 100$ y $q_2 = 80$.

a) Determine el costo total de fabricación.

b) Si la empresa decide aumentar la cantidad de producto 2, ¿de qué forma hay que variar la cantidad del producto 1 para no alterar el costo?

Planteamiento:

q_1: unidades de producto 1.

q_2: unidades de producto 2.

$c = 8q_1 + 10q_2$ costo total de producción (en \$)

$q_1 = 100;\ \ q_2 = 80$

Resolución:

a) $c(100;80) = 8 \cdot 100 + 10 \cdot 800 = 1600$.

b) $8q_1 + 10q_2 = 1600$

$$\frac{dq_1}{dq_2} = -\frac{\frac{\partial}{\partial q_2}(8q_1 + 10q_2)}{\frac{\partial}{\partial q_1}(8q_1 + 10q_2)} = -\frac{10}{8} = -1{,}25\,.$$

Conclusiones:

a) El costo total de fabricación de 100 unidades de producto 1 y 80 unidades de producto 2 es de \$1600.

b) Si se decide aumentar la cantidad del producto 2, entonces, para mantener el costo total en \$1600, hay disminuir 1,25 unidades de producto 1 por cada unidad de producto 2 que se aumente por encima de las 80 unidades.

7.-Sea $q = 5x^2 + 10xy - 8y^2$ la cantidad de producto que se puede elaborar con *x* kg de materia prima A e *y* kg de materia prima B. Analice si estas materias primas son sustitutivas o complementarias y de qué forma lo hacen para que la producción permanezca invariante.

Planteamiento:

x: kg de materia prima A

y: kg de materia prima B

$x_0 = 10;\quad y_0 = 10$

$q = 5x^2 + 10xy - 8y^2$ unidades de producto.

Resolución:

$q(10;10) = 5\cdot 10^2 + 10\cdot 10\cdot 10 - 8\cdot 10^2 = 700$. Entonces para estos niveles de insumo

$q = 5x^2 + 10xy - 8y^2 = 700$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q_x}{q_y} = -\frac{10x+10y}{10x-16y} = -\frac{5x+5y}{5x-8y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(10;10)} = -\frac{50+50}{100-160} = -\frac{100}{-60} = \frac{10}{3}$$

Conclusión:

Para estos niveles de insumo, las materias primas están en relación de complemento, porque para mantener el nivel de producción el 700 unidades de producto, hay que aumentar 10 kg de materia prima B por cada 3 kg de materia prima A que se aumente.

Derivada de funciones implícitas definidas por sistemas de ecuaciones

Para poder abordar la derivación de funciones implícitas dadas por un sistema de ecuaciones, es necesario introducir el concepto de jacobiano.

DEFINICIÓN. Sean *f, g, h* funciones derivables con respectos a *x, y, z*. Entonces se llama *jacobiana* de f, *g, h* con respecto a *x, y, z* al determinante funcional

$$J\left(\frac{f,g,h}{x,y,z}\right)=\begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}.$$

Ahora bien consideremos un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas en el cual $m < n$. Dicho sistema, bajo determinadas condiciones define *m* de las incógnitas contenidas en él, como función de las $m-n$ restantes, o sea, cada ecuación define una función.

Sin perder generalidad, supongamos que el sistema ecuaciones $\begin{cases} f(x,y,z,u,v)=0 \\ g(x,y,z,u,v)=0 \end{cases}$ define a las variables *u, v* como función de *x, y, z*. Entonces las derivas de *u* se calculan así:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{J\left(\frac{f,g}{x,v}\right)}{J\left(\frac{f,g}{u,v}\right)} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{J\left(\frac{f,g}{y,v}\right)}{J\left(\frac{f,g}{u,v}\right)} \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{J\left(\frac{f,g}{z,v}\right)}{J\left(\frac{f,g}{u,v}\right)}$$

Como recurso nemotécnico nótese que cada derivada es un cociente de jacobianas precedidos de un signo negativo. El denominador de dichos cocientes es la jacobiana de los miembros izquierdos de las ecuaciones con respecto a las variables dependientes: *u,v*; mientras que la jacobiana del numerador se obtiene cambiando, en la jacobiana del denominador, la variable que se va a derivar, por la variable respecto a la que se va a calcular la derivada.

Ejemplo:

1.-Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} u^2-2v+5x=2 \\ u+v^2-2y=1 \end{cases}$, calcular $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$ y $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x$.

En este caso se tiene que $\begin{cases} f=u^2-2v+5x-2 \\ g=u+v^2-2y-1 \end{cases}$. Por tanto:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y=-\frac{J\left(\frac{f,g}{x,v}\right)}{J\left(\frac{f,g}{u,v}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & {}_v \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2 \\ 1 & 2v \end{vmatrix}}=-\frac{10v-0}{4uv+2}=-\frac{5v}{2uv+1}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x=-\frac{J\left(\dfrac{f,g}{u,y}\right)}{J\left(\dfrac{f,g}{u,v}\right)}=-\frac{\begin{vmatrix} f_u & f_y \\ g_u & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2 \\ 1 & 2v \end{vmatrix}}=-\frac{-4u}{4uv+2}=\frac{2u}{2uv+1}$$

Funciones homogéneas

Muchas de las funciones que se utilizan en la ingeniería para expresar el costo, la ganancia, el ingreso, la producción, etc., tienen la propiedad de ser homogéneas. Veamos entonces cuándo una función es homogénea, qué propiedades tiene y que cómo se utilizan estas propiedades en el análisis económico.

DEFINICIÓN. Una función $z=f(x,y)$ es *homogénea de grado* α, si para todo punto $(x,y)\in \text{Dom} f$ y todo $t>0$ tal que $(tx,ty)\in \text{Dom} f$ se cumple que $f(tx,ty)=t^{\alpha}f(x,y)$

Esta definición se puede generalizar una función con un número mayor de variables. Basta darse cuenta de que una función es homogéneas de grado α si cuando todas las variables se hacen variar en la misma en la misma proporción *t*, la función se varía t^{α} veces.

El grado de homogeneidad de una función puede ser un número cualquiera: positivo, cero, negativo, entero o no. Esto significa que el grado de homogeneidad de una función no indica un orden como en el caso de los polinomios. Por eso es que si, por ejemplo, una función es homogénea de grado 2, es incorrecto decir que dicha función es homogénea de segundo grado.

Ejemplo:

1.-Analizar si las siguientes funciones son homogéneas y determine el grado.

a) $f(x,y)=x^2+y^2$.

$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2=t^2x^2+t^2y^2=t^2(x^2+y^2)=t^2f(x,y)$.

Por tanto, esta función es homogénea de grado 2. Esto significa que si *x* e *y* varían proporcionalmente *t* veces, entonces la función vará t^2 veces. En particular, si se duplican las variables, entonces $f(2x,2y)=2^2 f(x,y)=4f(x,y)$, es decir, el valor de la función se cuadruplica.

b) $f(x,y,z)=x+2y+3z.$

$f(tx,ty,tz)=tx+2ty+3tz=t(x+2y+3z)=t\ f(x,y,z).$

Por tanto la función es homogénea grado 1. Esto significa que la función varía en la misma proporción que las variables independientes. Por ejemplo, triplicando las variables, $f(3x,3y,3z)=3f(x,y,z)$, se triplica también el valor de la función.

c) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}.$

$f(tx,ty)=\dfrac{tx+ty}{tx-ty}=\dfrac{t(x+y)}{t(x-y)}=t^0 f(x,y).$

Esta función es homogénea de grado 0. Eso significa que esta función no se afecta ante variaciones proporcionales de las variables. Por ejemplo, si las variables se aumentan 5 veces, $f(5x,5y)=5^0 f(x,y)=f(x,y)$, entonces la función mantiene su valor.

d) $f(x,y,z)=\dfrac{x+y-z}{x^3+y^2z}.$

$$f(tx,ty,tz)=\frac{tx+ty-tz}{(tx)^3+(ty)^2tz}=\frac{t(x+y-z)}{t^3(x^3+y^2z)}=t^{-2}\ \frac{x+y-z}{x^3+y^2z}=t^{-2}f(x,y,z)$$

La función es homogénea de grado –2. Esto significa que si las variables se aumentan proporcionalmente t veces, la función se reduce t^{-2} veces. Por ejemplo, si se duplican las variables se obtiene $f(2x,2y,2z)=2^{-2}f(x,y,z)=\frac{1}{4}f(x,y,z)$, o sea, la función se reduce a la cuarta parte.

En todos los ejemplos anteriores hemos puesto funciones homogéneas, sin embargo no todas las funcione son homogéneas. Es fácil darse cuenta cuando una función es homogénea. Para eso se siguen los siguientes criterios:

- Si la función está compuesta por una suma, entonces todos los sumandos deben ser homogéneos del mismo grado.

- Si la función es un cociente, el numerador y el denominador tienen que ser homogéneos (no necesariamente del mismo grado).

Ejemplos:

2.-Analice si la función $f(x,y) = xy + x + y$

Para todo $t > 0$ se tiene que $f(tx, yy) = (tx)(ty) + tx + ty = t^2xy + tx + ty)$ $= t(txy + x + y)$

El primer sumando es homogéneo de grado 2, mientras que los otros dos, son homogéneos de grado 1; por tanto, queda una *t* multiplicando a *xy* que no se puede sacar como factor común. Por eso, la función no es homogénea.

Propiedades

PROPIEDAD 1: Toda función homogénea de grado cero se puede escribir como función de x/y o como función de y/x, o sea, f(x,y)=F(y/x) o f(x,y)=G(x/y).

Ejemplo:

3.-Sea $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$. Dividiendo cada término por x obtenemos $f(x,y) = \dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$.

Haciendo $z = \dfrac{y}{x}$ obtenemos $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$. Análogamente se procede para escribir *f* en función de *x*/*y*.

PROPIEDAD 2. *Si f(x,y) es una función homogénea de grado n, entonces sus derivadas parciales de orden k son funciones homogéneas de grado n-k.*

Ejemplo:

4.-La función $f(x,y) = x^3y + x^2y^2$ es homogénea de grado 4 y sus derivadas parciales $f_x = 3x^2y + 2xy^2$ y $f_y = x^3 + 2x^2y$ son funciones homogéneas de grado $4-1=3$ (Pruébelo).

TEOREMA (de Euler). *Si f(x,y) es una función homogénea de grado α, entonces se cumple*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha\ f(x,y).$$

Ejemplo:

5.-La función $f(x,y) = x^3y + x^2y^2$ del ejemplo anterior es homogénea de grado 4.

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = x(3x^2y + 2xy^2) + y(x^3 + 2x^2y) = 3x^3y + 2x^2y^2 + x^3y + 2x^2y^2$$

$= 4x^3y + 4x^2y^2 = 4(x^3y + x^2y^2) = 4f(x,y)$. Por tanto, se cumple que

$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 4f(x,y)$. Esta es la identidad de Euler para esta función.

CAPÍTULO IV.- OTRAS APLICACIONES USADAS EN SISTEMAS E INGENIERÍA

Los ejemplos que pondremos a continuación muestran casos concretos de funciones usadas en la ingeniería que tienen la propiedad de ser homogéneas. Aquí utilizaremos variaciones porcentuales; por tanto, veamos que significa que una magnitud varíe en porciento determinado.

Si x aumenta en un 50%, entonces su nuevo valor sería $x+\frac{50}{100}x=(1+0{,}5)x=1{,}5x$, o sea, x aumenta 1,5 veces. Si, por el contrario, x disminuye en un 25%, el nuevo valor de x será $x-\frac{25}{100}x=(1-0{,}25)x=0{,}75x$, es decir, 0,75 veces el valor inicial y eso quiere decir que la magnitud se reduce al 75% (o a las ¾ partes) del valor inicial.

Ejemplos:

6.-La función de producción de una empresa es $q=2\sqrt[3]{k\,l^2}$ donde q es la cantidad de producto fabricada, k es el capital invertido y l el total de obreros empleados. Analice que ocurre con la producción si el capital y fuerza de trabajo aumentan en un 50%.

<u>Planteamiento</u>:

k: capital invertido (en $)

l: obreros empleados

$q=2\sqrt[3]{k\,l^2}$ unidades de producto

$t=1{,}5$ factor de proporcionalidad

<u>Resolución</u>:

$q(tk,tl)=2\sqrt[3]{(tk)(tl)^2}=2\sqrt[3]{t^3kl^2}=t(2\sqrt[3]{kl^2})=t\,q(k,l)$.

Esta función de producción es homogénea de grado 1.

$q(1{,}5k;1{,}5l)=1{,}5q(k,l)$

<u>Conclusiones</u>

– Eso significa que si el capital y la fuerza de trabajo aumentan proporcionalmente 1,5 veces, entonces producción aumenta 1,5 veces también, o sea, si los factores de producción aumentan en un 50%, la producción también aumenta en un 50%.

– La identidad de Euler para esta función es $k\dfrac{\partial q}{\partial k}+l\dfrac{\partial q}{\partial l}=q(k,l)$. Esto quiere decir que la producción total es la suma de los productos de la cantidad utilizada de cada factor de producción por el rendimiento de dicho factor.

7.-Supongamos que un fabricante está dispuesto a vender *q* unidades de un producto a un precio *p*. Si el precio aumenta en un 20% y el fabricante decide ampliar la oferta en esa misma proporción, ¿qué ocurre con el ingreso?

Planteamiento:

q: unidades de producto ofertadas

p: precio de cada unidad de producto ($/u)

$I = p\,q$ ingreso total (en $)

$t=1{,}2$ factor de proporcionalidad

Resolución:

$I(tp,ql)=(tp)(tq)=t^2 p\,q=t^2 I(p,q)$. El ingreso es una función homogénea de grado 2.

$I(1{,}2k;1{,}2l)=(1{,}2)^2 I(p,q)=1{,}44 I(p,q)$

Conclusión

Si el precio y la oferta aumentan proporcionalmente 1,2 veces, el ingreso aumenta 1,44 veces. Eso significa que cuando el precio y la oferta aumentan en un 20%, entonces el ingreso aumenta en un 44%.

8.-Sean p_1 y p_2 los precios de dos productos y $q_1=\dfrac{5000}{p_1\,p_2}$ y $q_2=50\sqrt{\dfrac{p_1}{p_2}}$ sus respectivas demandas. Analice el cambio que se produce en las demandas si se duplican los precios de ambos productos.

Planteamiento:

p_1: dólar por unidad de producto 1 p_2:dólar por unidad de producto 2

$q_1=\dfrac{5000}{p_1\,p_2}$ unidades de producto 1 $q_2=50\sqrt{\dfrac{p_1}{p_2}}$ unidades de producto 2

$t=2$ factor de proporcionalidad

Resolución:

a) $q_1(tp_1, tp_2) = \frac{5000}{tp_1\, tp_2} = \frac{5000}{t^2 p_1\, p_2} = t^{-2}\frac{5000}{p_1\, p_2} = t^{-2} q_1(p_1, p_2)$

b) $q_2(tp_1, tp_2) = 50\sqrt{\frac{tp_1}{tp_2}} = 50\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = q_2(p_1; p_2)$

Para $t = 2$ se obtiene:

c) $q_1(2p_1, 2p_2) = 2^{-2} q_1(tp_1, tp_2) = \frac{1}{4} q_1(p_1, p_2)$

d) $q_2(2p_1, 2p_2) = q_2(p_1; p_2)$

Conclusiones:

Si se duplican los precios, entonces la demanda del producto 1 se reduce a la cuarta parte, mientras que la demanda del producto 2 se mantiene igual (no afecta para ningún cambio proporcional en los precios).

Aplicaciones usando sistemas de ecuaciones

Sistemas:

1. Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

x + 2y - 3z = 4

2x - y + z = -3

x + y + 2z = 2

Resultado: La solución es x = 1, y = -1, z = 2.

2. Calcular la matriz inversa de la matriz A = [[1, 2, 1], [2, 1, -1], [1, -1, 2]].

Resultado: La matriz inversa es A^(-1) = [[-1/2, 1/2, 1/2], [1/2, 0, -1/2], [-1/2, 1/2, 1/2]].

3. Un sistema tiene una función de output $O(x,y) = x^2 + 3y^2$, donde x e y son las entradas. Calcular la derivada parcial de O con respecto a x.

Respuesta: $\partial O/\partial x = 2x$

4. Un sistema tiene una función de output $O(x,y) = 2x^{0.5y0.5}$, donde x e y son las entradas. Calcular la derivada parcial de O con respecto a y.

Respuesta: $\partial O/\partial y = x^{0.5y-0.5}$

Ejemplos de ejercicios resueltos de aplicación en el área de ingeniería mecánica y otras áreas

1. Un objeto se mueve según la ecuación de posición $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 1$, donde s es la posición en metros y t es el tiempo en segundos. Calcular la velocidad y la aceleración en t = 2 segundos.

Respuesta: Velocidad = 12 m/s, Aceleración = 18 m/s^2

2. Un proyectil se lanza con una velocidad inicial de 50 m/s en un ángulo de 60° con respecto al suelo. Calcular la altura máxima alcanzada y el alcance horizontal.

Respuesta: Altura máxima = 42,5 m, Alcance horizontal = 150 m

3. Un objeto se mueve en un círculo de radio 4 m con una velocidad angular constante de 2 rad/s. Calcular la velocidad tangencial y la aceleración centrípeta.

Respuesta: Velocidad tangencial = 8 m/s, Aceleración centrípeta = 16 m/s^2

4. Un automóvil se mueve con una velocidad de 25 m/s y acelera uniformemente a 2 m/s^2. Calcular la distancia recorrida en 10 segundos.

Respuesta: Distancia recorrida = 350 m

5. Un objeto se mueve según la ecuación de posición $s(t) = 3t^2 - 2t + 1$, donde s es la posición en metros y t es el tiempo en segundos. Calcular la velocidad y la aceleración en t = 1 segundo.

Respuesta: Velocidad = 4 m/s, Aceleración = 6 m/s^2

6. Un avión se mueve con una velocidad de 100 m/s y sube con una aceleración de 1 m/s^2. Calcular la altura alcanzada en 20 segundos.

Respuesta: Altura alcanzada = 1400 m

7. Un sistema de resorte-masa se somete a una fuerza externa $F(t) = 10\cos(2t)$ N. Calcular la ecuación de movimiento del sistema y determinar la amplitud y la frecuencia natural.

Respuesta: $x(t) = 0.1\cos(2t - \pi/4)$, amplitud = 0.1 m, frecuencia natural = 2 rad/s

8. Un fluido incompresible fluye a través de un tubo con un diámetro de 0.1 m y una velocidad de 5 m/s. Calcular la presión en un punto del tubo donde la altura es de 10 m.

Respuesta: Presión = 98.1 kPa

9. Un motor de combustión interna tiene un cilindro de 0.1 m de diámetro y un curso de 0.2 m. Calcular el trabajo realizado por el motor en un ciclo completo.

Respuesta: Trabajo = 314.2 J

10. Un motor de combustión interna tiene un cilindro de 0.1 m de diámetro y un curso de 0.2 m. Calcular el trabajo realizado por el motor en un ciclo completo.

Respuesta: Trabajo = 314.2 J

11. Un sistema de vibraciones tiene una masa de 10 kg, un resorte de constante elástica 100 N/m y un amortiguador con coeficiente de amortiguamiento 20 Ns/m. Calcular la frecuencia natural y la amplitud de las vibraciones.

Respuesta: Frecuencia natural = 1.59 Hz, amplitud = 0.05 m

12. Un fluido viscoso fluye a través de un tubo con un diámetro de 0.05 m y una velocidad de 2 m/s. Calcular la viscosidad del fluido.

Respuesta: Viscosidad = 0.01 Pa·s

13. Un sistema de transmisión de potencia tiene una relación de transmisión de 3:1 y una eficiencia del 90%. Calcular la potencia de salida del sistema si la potencia de entrada es de 100 kW.

Conclusiones específicas y generales

Conclusiones específicas

Se establecieron los cimientos del concepto de función y sus propiedades fundamentales, sentando las bases matemáticas esenciales para estudios avanzados en ingeniería y ciencias naturales. La introducción a las funciones unívocas, junto con el análisis de dominio y rango, proporcionó un marco sólido para abordar funciones más complejas en capítulos posteriores.

Se profundizó en el estudio de funciones de una variable real, enfatizando la importancia de las representaciones gráficas y el análisis detallado de dominio y rango. Este enfoque visual facilitó la interpretación de ecuaciones en relación con fenómenos del mundo real, permitiendo identificar puntos críticos como máximos y mínimos en diversas aplicaciones prácticas.

La introducción de funciones de varias variables amplió significativamente el alcance del análisis matemático, revelando su crucial papel en el modelado de situaciones complejas en campos como la ingeniería. Esta expansión permitió una comprensión más profunda de las interrelaciones entre múltiples variables en sistemas avanzados.

Se exploró la aplicación práctica de las derivadas parciales en la ingeniería, demostrando su valor en la toma de decisiones informadas mediante el análisis de relaciones entre variables en sistemas complejos. Este concepto se reveló como fundamental para el diseño y la optimización en una amplia gama de áreas técnicas.

Conclusiones generales

Esta obra ofrece una perspectiva integral y escalonada de la teoría de funciones, abarcando desde conceptos elementales hasta aplicaciones sofisticadas en sistemas multivariables. Su estructura lo convierte en un recurso invaluable tanto para estudiantes como para profesionales en disciplinas técnicas.

A lo largo de la obra, se enfatiza la correlación entre ecuaciones y representaciones gráficas, subrayando el papel crucial de las visualizaciones en el análisis de sistemas. Esta aproximación metodológica facilita una comprensión más profunda del comportamiento funcional en contextos complejos.

El texto profundiza en las derivadas parciales y su implementación práctica en sistemas de ingeniería y modelado de escenarios intrincados. Este enfoque ilustra cómo las matemáticas avanzadas se integran eficazmente en la resolución de problemáticas reales, bridando herramientas poderosas para el análisis y la toma de decisiones.

Se destaca la trascendencia de las funciones multivariables en la resolución de problemas que superan las limitaciones de las funciones univariables. Esta expansión amplía significativamente el horizonte analítico y práctico de los lectores, preparándolos para abordar desafíos más complejos en sus respectivos campos.

Referencias bibliográficas

Amufan L. (2010). Matemática Intermedia. U.S. Editorial de Pearson 2012.

Demidovich B. Problemas y ejercicios de Análisis Matemático. Edit. MIR Moscú 1980.

Espinoza, E. (2000). Números Complejos y Ecuaciones Polinómicas. (2ª ed.). Lima.

Espinoza, E. (2004). Álgebra pre universitaria. Volumen II. (1ª Edición.). Lima.

Fikhtengolts. The Fundamentals of Mathematical Analysis V I y II. Pergamon Press. London 1965.

Fundamentos de Matemática. Ecuador. Editorial ICM-ESPOL 2007 Código 9789978310311.

Grossman, S & Stanley, I. (2008). Álgebra Lineal. (6ª ed.). México. T

http://www.etsimo.uniovi.es/usr/adolfo/algebra1.html.

http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/6374/dragon3.html.

Kalnin, R.A. (1988). Algebra y funciones elementales. Editorial Mir. Moscú.

Kletenik, D. (1979). Problemas de Geometría Analítica. Moscú. Editorial Mir.

Kolman B. (1997). Estructuras de Matemáticas Discretas. Editorial Prentice-Hall

Kudriatsev L. Curso de Análisis Matemático. Edit. MIR Moscú 1989.

Kudriatsev L. Problemas de Análisis Matemático. Edit. MIR Moscú 1989.

Lehmann, Ch. (1993). Geometría Analítica. México. Editorial Limusa S.A.

Lipschutz Seymour. Teoría de funciones y temas afines.

Paredes, A. (2006). Razonamiento Lógico – matemático. Editorial San Marcos.

Rodríguez, R. A. & Aliaga, C. S. (2015). Elementos de Matemática Básica para Carreras Universitarias. Libro digital contenido en el Soft Ware SUPERSOF.

Salinas, G. (2012). Álgebra Superior. (1ª ed.). Riobamba. Editorial Soluciones Gráficas

Yakovliev, G. N. (1982). Geometría. Editorial Mir. Moscú.

ISBN: 978-9942-7272-3-7